Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Andalucía

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Óscar Rey Clemente

Francisco Javier Ros Castellón

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

(2,5 puntos) Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camisera lisa necesita $70\ g$ de algodón y $20\ g$ de poliéster y para cada camiseta estampada $60\ g$ de algodón y $10\ g$ de poliéster. La empresa dispone para ello de $4200\ g$ de algodón y $800\ g$ de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Problema A.2:

Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$.

a) **(1 punto)** Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$.

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía y la curvatura de la función f.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int f(x)dx$.

Problema A.3:

El $65\ \%$ de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el $75\ \%$ de los turistas que se hospedan en la capital y el $15\ \%$ de los que se hospedan en zonas rurales, lo hacen en hoteles, mientras que el resto lo hace es apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) **(1 punto)** Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Problema A.4:

Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partirlo político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al $97\ \%$ para la proporción de individuos que piensen votar a ese partido en dicha ciudad.

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al $2\ \%$.

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) **(0.5 puntos)** Razone si la matriz A es simétrica.

b) **(1 punto)** Calcule A^{-1}.

c) **(1 punto)** Resuelva la ecuación matricial $2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = O$.

Problema B.2:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & si \quad x < 0 \\ x^2 + a & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) **(1 punto)** Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.

b) **(1.5 puntos)** Para $a = -2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f. ¿Tiene algún punto de inflexión?

Problema B.3:

El 69 % de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35 % películas y el 18 % no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que vea series o películas.

b) **(1 punto)** Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.

c) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

Problema B.4:

Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional.

b) **(1 punto)** Con una confianza del 95,5 %, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1,5 minutos?

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camisera lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4 200 g de algodón y 800 g de poliéster. Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Solución:

Se trata de un problema de *Programación Lineal*. Tenemos que obtener, por tanto, la *función objetivo* a optimizar (en este caso maximizar) y las *restricciones* a las que está sujeta.

Los puntos del plano que cumplan todas las restricciones estarán en una región del plano llamada *región factible*. La *solución óptima* será aquella que optimiza la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

Dispongamos los datos del problema en una tabla:

Camisetas	Número de camisetas	Algodón	Poliéster	Beneficio
Lisas	x	$70x$	$20x$	$5x$
Estampadas	y	$60y$	$10y$	$4y$
Total		$70x+60y$	$20x+10y$	$5x+4y$

Las **restricciones** del problema son[1]:

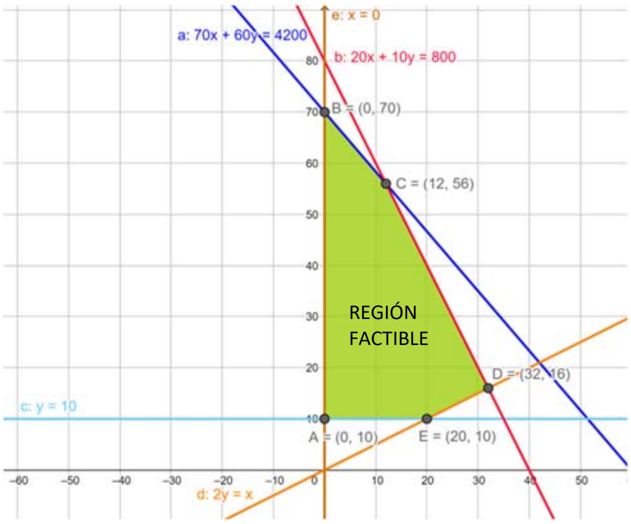
$$\left.\begin{array}{r} 70x+60y\le 4\,200 \\ 20x+10y\le 800 \\ y\ge 10 \\ 2y\ge x \\ x\ge 0 \end{array}\right\}$$

Y la **función objetivo** que tenemos que maximizar es:

$$F(x,y)=5x+4y$$

La representación de la región factible es:

[1] Como cada camiseta lisa necesita 70 g de algodón, una estampada 60 g y disponemos de 4200 g de algodón, nuestra primera restricción será $70x+60y\le 4200$. De la misma manera se obtendrían las siguientes restricciones.



Los vértices de la región factible son los puntos:

$$A(0,10)$$
$$B(0,70)$$
$$C(12,56)$$
$$D(32,16)$$
$$E(20,10)$$

Estos puntos se obtienen como intersección de las rectas correspondientes. Así, el punto $A(0,10)$ se obtiene como intersección de las rectas $x=0$, $y=10$, etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C	Vértice D	Vértice E
$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=10 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} x=0 \\ 70x+60y=4200 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} 70x+60y=4200 \\ 20x+10y=800 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} 20x+10y=800 \\ 2y=x \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} y=10 \\ 2y=x \end{matrix}\right\}$
$x=0, y=10$	$x=0, y=70$	$x=12, y=56$	$x=32, y=16$	$x=20, y=10$

Sabemos que el máximo se encuentra en algún vértice de la región factible, por lo que evaluamos la función objetivo $F(x,y)=5x+4y$ en cada uno de ellos.

Para $A(0,10)$ obtenemos que $F(0,10)=5\cdot 0+4\cdot 10=40$

Para $B(0,70)$, obtenemos que $F(0,70)=5\cdot 0+4\cdot 70=280$

Para $C(12,56)$, tenemos que $F(12,56)=5\cdot 12+4\cdot 56=284$

Para $D(32,16)$, tenemos que $F(32,16)=5\cdot 32+4\cdot 16=224$

Para $E(20,10)$, tenemos que $F(20,10)=5\cdot 20+4\cdot 10=140$

Por tanto, el máximo se alcanza en el punto $C(12,56)$ y es 284.

Es decir, se deben fabricar $\mathbf{12}$ camisetas lisas y $\mathbf{56}$ camisetas estampadas para obtener un beneficio máximo de $\mathbf{284}$ €.

Problema A.2:

Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$.
a) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$.
b) Estudie la monotonía y la curvatura de la función f.
c) Calcule $\int f(x)dx$

Solución:

a) Como la recta tangente pedida tiene que ser paralela a la recta $y = 3x - 3$, la pendiente ha de ser 3, luego $f'(x) = 3$. Por tanto,

$$f'(x) = 3 \Rightarrow 3x^2 - 9 = 3 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2$$

Así pues, los puntos en los que la recta tangente a la gráfica de la función f es paralela a la recta $y = 3x - 3$ son $x = 2$ y $x = -2$.

Obtendremos por ello dos rectas tangentes a la gráfica de la función que serán paralelas a la recta dada.

Ecuación de la recta tangente en $x = 2$

Sabemos que la ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en un punto $x = a$ es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Por tanto, la ecuación de la tangente en $x = 2$ vendrá dada por:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

Como

$$f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2 + 2 = -8$$

y

$$f'(2) = 3$$

sustituyendo obtenemos que:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Rightarrow y + 8 = 3(x - 2)$$

de donde $y = 3x - 14$ es la ecuación de la recta tangente en $x = 2$.

Ecuación de la recta tangente en $x = -2$

De igual forma, calcularemos la ecuación de la tangente en $x = -2$.

Como

$$f(-2) = (-2)^3 - 9 \cdot (-2) + 2 = 12$$

y

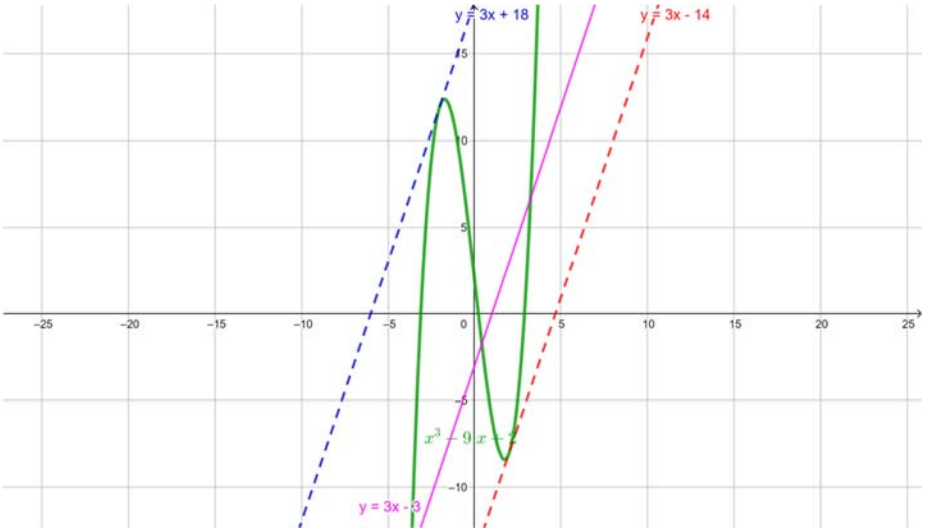
$$f'(-2) = 3$$

entonces

$$y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \Rightarrow y - 12 = 3(x+2) \Rightarrow y = 3x + 18$$

De donde $y = 3x + 18$ es la ecuación de la recta tangente en $x = -2$.

Concluimos por tanto que las rectas tangentes a la gráfica de la función f que son paralelas a la recta dada son: $\boldsymbol{y = 3x - 14}$ y $\boldsymbol{y = 3x + 18}$.



b) Monotonía

Para el estudio de la monotonía calcularemos la derivada primera y la igualaremos a cero:

$$f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Obtenemos así los puntos de posible cambio de signo de la derivada. En aquellos intervalos o semirrectas en los que el signo de la derivada primera sea positiva la función será creciente y en los que tenga signo negativo será decreciente.

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

La función es, por tanto, **creciente en** $(-\infty, -\sqrt{\mathbf{3}}) \cup (\sqrt{\mathbf{3}}, +\infty)$ **y decreciente en** $(-\sqrt{\mathbf{3}}, \sqrt{\mathbf{3}})$.

Tiene un máximo relativo en $(-\sqrt{3},\ 6\sqrt{3} + 2)$ y un mínimo relativo en $(\sqrt{3},\ -6\sqrt{3} + 2)$.

Curvatura

Para el estudio de la curvatura procederemos de forma análoga a la monotonía pero estudiando el signo de la derivada segunda. Calculamos pues la derivada segunda y la igualamos a cero:

$$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty,\ 0)$	$(0,\ +\infty)$
Signo de $f''(x)$	$-$	$+$
	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

La función es **convexa en** $(-\infty, \mathbf{0})$ **y cóncava en** $(\mathbf{0}, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(0, 2)$.

c) La integral pedida es:

$$\int f(x)dx = \int (x^3 - 9x + 2)dx = \int x^3 dx - 9\int x dx + 2\int dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 2x + C$$

$$\boldsymbol{\int f(x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 2x + C}$$

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal
LibrosMareaVerde.tk

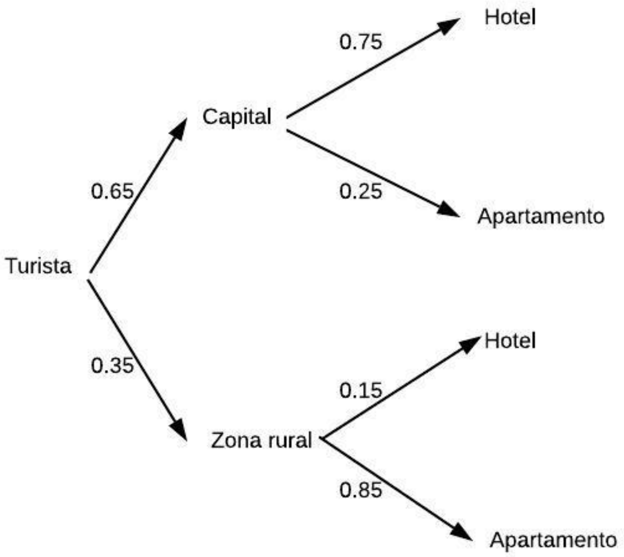
Problema A.3:

El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales, lo hacen en hoteles, mientras que el resto lo hace es apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?
b) Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Solución:

a) Si disponemos los datos del problema en un diagrama en árbol quedaría de la siguiente forma:



Entonces:

$P(Hotel) = 0.65 \cdot 0.75 + 0.35 \cdot 0.15 = 0.54$

La probabilidad de que se haya hospedado en un hotel es: $\boldsymbol{P(Hotel) = 0.54}$

b) Como $P(Hotel) = 0.54$, entonces $P(Apartamento) = 1 - P(Hotel) = 1 - 0.54 = 0.46$

Por tanto,

$$P(Zona\ rural/Apartamento) = \frac{P(Zona\ rural\ y\ Apartamento)}{P(Apartamento)} = \frac{0.35 \cdot 0.85}{0.46} = 0.6467$$

$$\boldsymbol{P(Zona\ rural/Apartamento) = 0.6467}$$

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal

Problema A.4:

Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partirlo político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a) Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de individuos que piensen votar a ese partido en dicha ciudad.

b) Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2 %.

Solución:

a) El intervalo de confianza para la proporción, con un nivel de confianza $1-\alpha$ viene dado por:

$$I.C.(p)=\left(\hat{p}-z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z}\sim\mathcal{N}(0,1)$ que verifica $P(\mathcal{Z}\le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

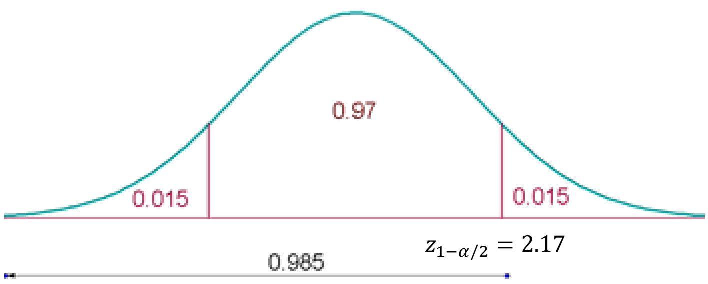
Con los datos del problema, la proporción de individuos que piensan votar al partido político en cuestión es:

$$\hat{p}=\frac{135}{300}=0.45$$

Como tenemos un nivel de confianza del 97 %, entonces:

$$1-\alpha=0.97\Rightarrow\alpha=0.03\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.015\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0.985$$

De $P(\mathcal{Z}\le z_{1-\alpha/2})=1-\frac{\alpha}{2}=1-0.015=0.985$ mirando en las tablas de la Normal tipificada $\mathcal{N}(0,1)$ obtenemos que $z_{1-\alpha/2}=2.17$



Luego, sustituyendo en la expresión del intervalo de confianza para la proporción, tenemos:

$$I.C.(p)=\left(0.45-2.17\sqrt{\frac{0.45\cdot 0.55}{300}},\qquad 0.45+2.17\sqrt{\frac{0.45\cdot 0.55}{300}}\right)=(0.3877, 0.5123)$$

$$\boldsymbol{I.C.(p)=(0.3877, 0.5123)}$$

b) El error máximo admisible (cota de error) para la estimación de la proporción p viene dado por la expresión:

$$\mathcal{E}=z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}$$

Sustituyendo nuestros datos en dicha expresión obtenemos que:

$$0.02=2.17\cdot\sqrt{\frac{0.45\cdot 0.55}{n}}\Rightarrow n=2913.63\simeq 2914$$

Luego, el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2 % es de **2 914** individuos.

SOLUCIONES OPCIÓN B CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) *Razone si la matriz A es simétrica.*
b) *Calcule A^{-1}.*
c) *Resuelva la ecuación matricial $2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = O$.*

Solución:

a) Una matriz cuadrada es simétrica si coincide con su traspuesta, es decir, A simétrica si $A = A^t$.

Como

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A **no** es simétrica.

b) Sabemos que una matriz cuadrada tiene inversa si $|A| \neq 0$, y podemos obtenerla mediante la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t)$$

En nuestro caso,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

luego existe A^{-1} y vale:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal

c) Resolvamos la ecuación matricial:

$$2X\cdot A - A^2 - 3I_3 = O$$

$$2X\cdot A = A^2 + 3I_3$$

$$2X = (A^2 + 3I_3)\cdot A^{-1} = A + 3A^{-1}$$

$$X = \frac{1}{2}\cdot (A + 3A^{-1})$$

Por tanto,

$$X = \frac{1}{2}(A + 3A^{-1}) = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -6 & -3 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -8 & -8 & -6 \\ -8 & -1 & -4 \\ 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 3 & 2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Así pues, la solución a nuestra ecuación matricial es:

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -3 \\ -4 & -1/2 & -2 \\ 3 & 2 & 7/2 \end{pmatrix}}$$

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal

Problema B.2:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & si \quad x < 0 \\ x^2 + a & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) Determine el valor del parámetro a para que f sea continua en todo su dominio. Para ese valor de a, estudie la derivabilidad de f.

b) Para $a = -2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f. ¿Tiene algún punto de inflexión?

Solución:

a) La rama $\frac{1}{x-1}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$, por tanto, también será continua y derivable en $x < 0$.

Además, la función polinómica $x^2 + a$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por lo que lo será en $x > 0$.

Por tanto, sólo tenemos que estudiar la continuidad en $x = 0$.

Sabemos que una función $y = f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si, y sólo si

$$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Veamos, pues, si se cumple que $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

1) $f(0) = 0^2 + a = a$
2) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = -1$
3) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + a) = 0^2 + a = a$

Por tanto, igualando los límites obtenemos que $a = -1$.

Luego para $\boldsymbol{a = -1}$ la función es continua en $x = 0$ y, por tanto, en $\mathbb{R}$.

Estudiemos a continuación la derivabilidad de f para ese valor de a.

Si $a = -1$ tenemos que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

y su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

La función f será derivable en $x = 0$ si $f'(0^-) = f'(0^+)$.

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(0-1)^2} = -1$$

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 2\cdot 0 = 0$. Como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$:

La función no es derivable en $x = 0$ para $a = -1$, luego sólo es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Para $a = -2$ la función f es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Para el estudio de la monotonía necesitamos conocer el signo de la derivada primera $f'(x)$. En los puntos en los que $f'(x) > 0$ la función será creciente y si $f'(x) < 0$ la función será decreciente.

Calculamos, por tanto, $f'(x)$.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Y resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$.

Para $x < 0$ tenemos $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ que no se anula para ningún valor de x. De hecho, siempre es negativa ya que es cociente de un número negativo y un cuadrado. Por tanto, la función f es decreciente para $x < 0$.

Para $x > 0$ tenemos que $f'(x) = 2x > 0$ ya que al ser $x > 0$ el producto $2x$ será positivo. Por tanto, la función f es creciente para $x > 0$.

En resumen, la función f es decreciente (↘) en $(-\infty, 0)$ y creciente (↗) en $(0, +\infty)$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$-$	$+$
	Decreciente ↘	Creciente ↗

Pasemos a continuación al estudio de la curvatura. Para ello debemos estudiar el signo de la derivada segunda $f''(x)$.

Como

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^3} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para $x < 0$ tenemos que $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} < 0$ ya que es numerador es positivo y el denominador negativo. Por tanto, f es convexa (∩) en $(-\infty, 0)$.

Para $x > 0$ tenemos que $f''(x) = 2 > 0$ luego f es cóncava (∪) en $(0, +\infty)$.

En resumen

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo de $f''(x)$	$-$	$+$
	Convexa (∩)	Cóncava (∪)

La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$. Pero la función no tiene punto de inflexión en $x = 0$ ya que no es continua en dicho punto.

Problema B.3:

El 69 % de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35 % películas y el 18 % no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) Calcule la probabilidad de que vea series o películas.
b) Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

Solución:

Sean los sucesos S: "Ver series" y P: "Ver películas". Entonces, según los datos del enunciado:

$$P(S) = 0.69$$
$$P(P) = 0.35$$
$$P(\bar{S} \cap \bar{P}) = 0.18$$

a) Como por las leyes de Morgan $\bar{S} \cap \bar{P} = \overline{S \cup P}$, tenemos que:

$P(\bar{S} \cap \bar{P}) = P(\overline{S \cup P}) = 1 - P(S \cup P) = 0.18 \Rightarrow P(S \cup P) = 1 - 0.18 = 0.82.$

$$\boldsymbol{P(S \cup P) = 0.82.}$$

b) La probabilidad de ver películas sabiendo que ve series vendrá dada por la expresión:

$$P(P/S) = \frac{P(P \cap S)}{P(S)}$$

Debemos, por tanto, calcular previamente $P(P \cap S)$.

Como

$$P(P \cup S) = P(P) + P(S) - P(P \cap S)$$

Sustituyendo las probabilidades conocidas tenemos que:

$$0.82 = 0.35 + 0.69 - P(P \cap S)$$

de donde

$$P(P \cap S) = 0.22$$

Ya estamos en condiciones de obtener la probabilidad pedida:

$$P(P/S) = \frac{P(P \cap S)}{P(S)} = \frac{0.22}{0.69} = 0.3188$$

$$\boldsymbol{P(P/S) = 0.3188}$$

c) La probabilidad de que vea series y no vea películas se obtiene de la siguiente manera:

$$P(S \cap \bar{P}) = P(S) - P(S \cap P) = 0.69 - 0.22 = 0.47$$

$$\boldsymbol{P(S \cap \bar{P}) = 0.47}$$

Autor: Francisco Javier Ros Castellón
Revisor: Luis Carlos Vidal

Problema B.4:

Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 *minutos. Se elige al azar una muestra de* 9 *empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:*

$$10 \quad 17 \quad 8 \quad 27 \quad 6 \quad 9 \quad 32 \quad 5 \quad 21$$

a) Determine un intervalo de confianza al $92\ \%$ *para la media poblacional.*
b) Con una confianza del $95.5\ \%$*, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a* $1{,}5$ *minutos?*

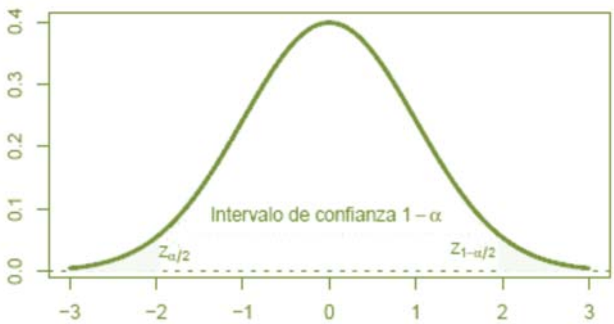
Solución:

Sabemos que la media muestral $\bar{x}$ es el estimador de la media poblacional μ y que sigue una distribución $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. Es decir, $\bar{x} \backsim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

También es sabido que el intervalo de confianza para estimar la media viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ son los puntos críticos de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z} \backsim \mathcal{N}(0,1)$ que verifican que $P(\mathcal{Z} \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.



Además, el error máximo de la estimación es:

$$\mathcal{E} = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

para el intervalo de la media poblacional, de donde el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar la media poblacional con un error menor de $\mathcal{E}$ es:

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

a) La media muestral viene dada por:

$$\bar{x} = \frac{10 + 17 + 8 + 27 + 6 + 9 + 32 + 5 + 21}{9} = \frac{135}{9} = 15$$

Como la desviación típica es $\sigma = 8$, el tamaño muestral es $n = 9$ y el nivel de confianza

$$1 - \alpha = 92\ \% = 0.92$$

Entonces $\alpha = 0.08$, con lo que $1 - \alpha/2 = 0.96$.

Por tanto,

$$P(\mathcal{Z} \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.96$$

En la tabla de la Normal tipificada $\mathcal{N}(0,1)$ debemos encontrar el punto que acumula una probabilidad de 0.96. El más próximo es el que acumula una probabilidad de 0.9599 que corresponde al punto 1.75, luego $z_{1-\alpha/2} = 1.75$.

Si interpoláramos entre 0.9599 y 0.9608 tendríamos que $z_{1-\alpha/2} = 1.751$.

Por tanto, como el intervalo de confianza para la media poblacional viene dado por:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

tendremos que

$$I.C.(\mu) = \left(15 - 1.75 \cdot \frac{8}{\sqrt{9}}, 15 + 1.75 \cdot \frac{8}{\sqrt{9}}\right) \simeq (10.3333, 19.6667)$$

$$\boldsymbol{I.C.(\mu) \simeq (10.3333, 19.6667)}$$

b) Tenemos que:

Desviación típica	$\sigma = 8$
Error	$\mathcal{E} < 1.5$
Nivel de confianza	$1 - \alpha = 95.5\% = 0.955$ de donde $\alpha = 0.045$
	Es decir,

$$\alpha/2 = \frac{0.045}{2} = 0.0225$$

Como

$$P\left(\mathcal{Z} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0.0225 = 0.9775$$

mirando en las tablas de la $\mathcal{N}(0,1)$ vemos que las más próximas son 0.9772 y 0.978, que corresponden a los puntos 2.00 y 2.01, por lo que el punto crítico $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ será la media de ambos, es decir,

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{2.00 + 2.01}{2} = 2.005$$

Como el error $\mathcal{E} < z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos que

$$n \geq \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\mathcal{E}}\right)^2 = \left(\frac{2.005 \cdot 8}{1.5}\right)^2 \simeq 114.3474$$

Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra para el tiempo medio con un error inferior a 1.5 minutos es $\boldsymbol{n = 115}$ empleados.

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS

CURSO 2018–2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

(SEPTIEMBRE)

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste a los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

a) **(1 punto)** Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:
   1) $A \cdot A^t$ es una matriz simétrica.
   2) $A \cdot A^t + B$ posee inversa.

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $B \cdot X + A = C$.

EJERCICIO 2

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x) = 2(2x - 1)^2 + 1$, con $0 \le x \le 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) **(1 punto)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función C(x).
b) **(0.75 puntos)** Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?
c) **(0.75 puntos)** Realice un esbozo de la gráfica de la función C(x).

EJERCICIO 3

Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25% de su producción, el B el 40% y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15% de patinetes del modelo A, el 10% del B y el 12% del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.
b) **(0.5 puntos)** Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?
c) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C.

EJERCICIO 4

Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo, con un 92% de confianza, para la puntuación media de los participantes en dicho concurso.
b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98%.

PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS

CURSO 2018–2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

(SEPTIEMBRE)

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste a los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar 1 kg de concentrado A se necesitan 4.5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7.5 kg de grano de Colombia y 1.5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67.5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) **(1.75 puntos)** Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.
b) **(0.25 puntos)** Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.
c) **(0.5 puntos)** Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo de tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos kilogramos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

EJERCICIO 2

De una cierta función *f*, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

a) **(1 punto)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.
b) **(0.75 puntos)** Determine la curvatura de *f* y halle la abscisa de su punto de inflexión.
c) **(0.75 puntos)** Calcule la función *f*, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (-1, 3).

EJERCICIO 3

De dos sucesos *A* y *B* de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$P(A \cap B) = 0.2 \qquad P(A \cup B) = 0.4 \qquad P(A / B) = 0.8$$

a) **(1.2 puntos)** Calcule $P(B)$ y $P(A)$.
b) **(0.5 puntos)** ¿Son los sucesos A y B independientes? Razone la respuesta.
c) **(0.8 puntos)** Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

EJERCICIO 4

Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22% de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a) **(1.5 puntos)** Para un nivel de confianza del 92%, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.
b) **(1 punto)** Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizados por causas debidas al tabaco sea inferior al 3%.

SOLUCIONES OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

a) Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $A \cdot A^t$ es una matriz simétrica.

2) $A \cdot At + B$ posee inversa.

b) Resuelva la ecuación matricial $B \cdot X + A = C$.

Solución:

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

a1) Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $A \cdot At$ es una matriz simétrica.

Calculamos la matriz $E = A \cdot At = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Vemos que D es simétrica, ya que $D = Dt$. Por lo tanto, la afirmación es cierta.

a2) $A \cdot At + B$ posee inversa.

Calculamos la matriz $E = A \cdot At + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$|E|$=6 · 2 – (-3) · (-4) = 0

Vemos que E no tiene inversa, ya que $|E|$ = 0. Por lo tanto, la afirmación es falsa.

$A \cdot At$ es una matriz simétrica es cierta y $A \cdot At + B$ posee inversa es falsa

b) Resuelva la ecuación matricial $B \cdot X + A = C$.

Resolvemos la ecuación matricial:

$B{\cdot}X + A = C \Rightarrow B{\cdot}X = C - A \Rightarrow B\text{-}1{\cdot}B{\cdot}X = B\text{-}1{\cdot}(C - A) \Rightarrow X = B\text{-}1{\cdot}(C - A)$

$|B|$=1 · 0 – (-2) · (-3) = 0

Calculamos $B^{-1} = \frac{(B^d)^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}'}{-6} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{-6} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$X = B^{-1} \cdot (C - A) = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix} =$

$= -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 18 & 36 \\ 12 & -18 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{X = B^{-1} \cdot (C - A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x) = 2(2x - 1)^2 + 1$, con $0 \le x \le 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.
b) Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?
c) Realice un esbozo de la gráfica de la función $C(x)$.

Solución:

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x) = 2(2x - 1)^2 + 1$, con $0 \le x \le 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.

Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$C'(x) = 2\cdot 2\cdot(2x - 1)\cdot 2 = 16x - 8 = 0 \Rightarrow x = ½$

	(0, 1/2)	(1/2, 2)
Signo $C'(x)$	–	+
Función	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en (0, 1/2) y creciente en (1/2, 2).

Tiene un mínimo relativo en (1/2, 1).

b) Determinamos la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?

Nos piden el mínimo absoluto, que puede estar en los extremos del intervalo, es decir, en $x = 0$ o en $x = 2$, o en el mínimo relativo. Calculamos el valor que toma la función en esos puntos para ver cuál es el mínimo absoluto.

$C(0) = 3$

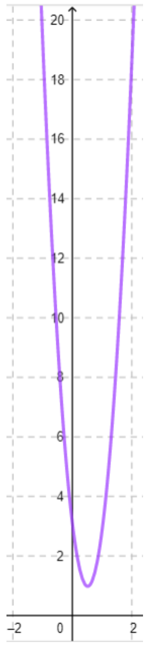
$C(1/2) = 1$

$C(2) = 19$

Luego, el coste mínimo se da con una producción de **0.5** millones de kilogramos y vale **1**.

c) Realizamos un esbozo de la gráfica de la función $C(x)$.

Como conocemos los valores de $C(x)$ en los extremos del intervalo y en el mínimo absoluto, conocemos los tramos de crecimiento y de decrecimiento y que, por ser cuadrática, tiene forma parabólica, podemos dibujar la gráfica de la función:



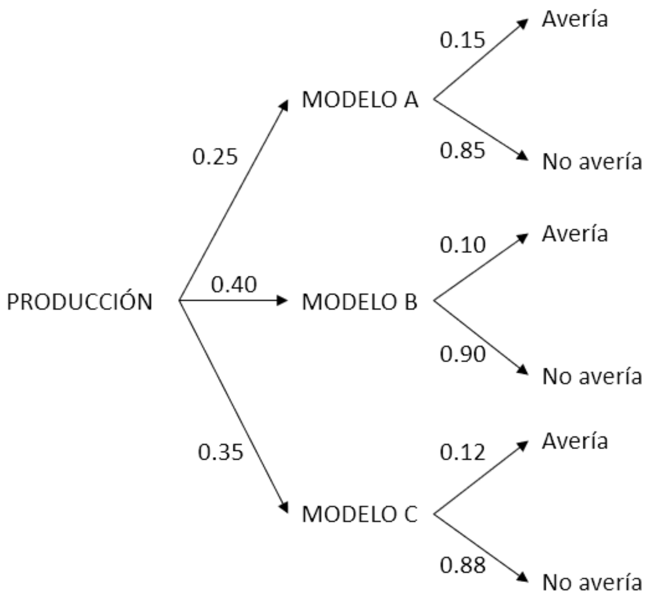
EJERCICIO 3

Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25 % de su producción, el B el 40 % y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15 % de patinetes del modelo A, el 10 % del B y el 12 % del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.

a) *Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.*
b) *Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?*
c) *Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C.*

Solución:

En primer lugar, hacemos un diagrama de árbol:



a) Calculamos la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.

$\mathrm{P(avería)} = 0.25 \cdot 0.15 + 0.40 \cdot 0.10 + 0.35 \cdot 0.12 = 0.1195$

$$P(\text{avería}) = \mathbf{0.1195}$$

b) Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?

$$\mathrm{P(No\ avería\ |A)} = \frac{\mathrm{P(No\ avería\ \cap A)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{0.25 \cdot 0.85}{0.25} = 0.85$$

$$\mathrm{P(No\ avería\ |A)} = \mathbf{0.85}$$

c) Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C.

$\mathrm{P(Avería\ \cup C)} = \mathrm{P(Avería)} + \mathrm{P(C)} - \mathrm{P(Avería\ \cap C)} = 0.1195 + 0.35 - 0.35 \cdot 0.12 = 0.4275$

$$\mathrm{P(Avería\ \cup C)} = \mathbf{0.4275}$$

Autor: Oscar Rey Clemente
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

EJERCICIO 4

Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %. Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) Obtenga un intervalo, con un 92 % de confianza, para la puntuación media de los participantes en dicho concurso.

b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98%.

Solución:

Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) Obtenga un intervalo, con un 92 % de confianza, para la puntuación media de los participantes en dicho concurso.

$$\frac{1+0.92}{2} = 0.96 \; \rightarrow \; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.744$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$\text{I. C.} = (35 \pm 1.755 \cdot \frac{6}{\sqrt{64}} = (33.6837\,; 36.3162)$$

$$\text{I. C.} = (\mathbf{33.6837\,; 36.3162})$$

b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %.

$$\frac{1+0.98}{2} = 0.99 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.33$$

$$\text{E} = 2 = 2.33 \cdot \frac{6}{\sqrt{\text{n}}} \rightarrow \text{n} = 48.86 \cong 49$$

$$\text{Tamaño mínimo} \; = \; n = 48.86 \cong \mathbf{49}$$

SOLUCIONES OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar 1 kg de concentrado A se necesitan 4.5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7.5 kg de grano de Colombia y 1.5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67.5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

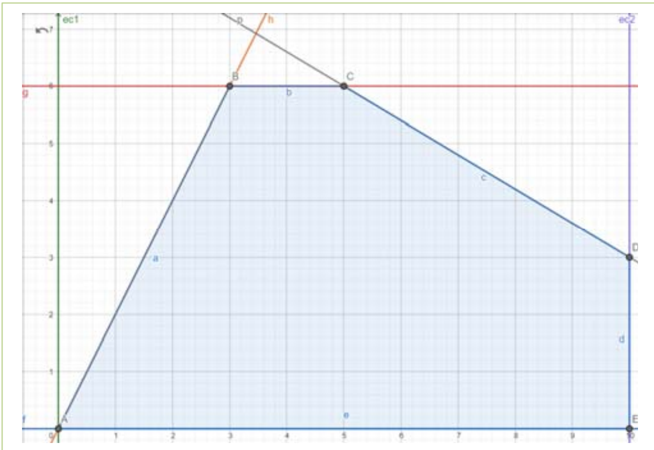
- *a) Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.*
- *b) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.*
- *c) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo de tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos kilogramos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?*

Solución:

a) Representamos la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

En primer lugar, hacemos una tabla con los datos del problema.

(Por cada kg de concentrado)	**Colombia**	**Etiopía**	**Costa Rica**
Concentrado A (x)	4.5 kg	3 kg	
Concentrado B (y)	7.5 kg		1.5 kg
Total disponible	67.5 kg	30 kg	9 kg



Las inecuaciones del problema son:

$$\begin{cases} 4.5x + 7.5y \le 67.5 \\ 3x \le 30 \\ 1.5y \le 9 \\ x \ge y/2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Vamos a representar las inecuaciones y los límites que pueden tomar las distintas variables:

- De la 1º inecuación se obtiene un límite de la región: $y \le \left(\frac{-4.5}{7.5}\right)x + \left(\frac{67.5}{7.5}\right)$ (p)
- De la 2ª inecuación se obtiene el límite máximo del concentrado A (x), puesto que: $x \le 10$ (ec2)
- De la 3ª inecuación se obtiene el límite máximo del concentrado B (y), puesto que: $y \le 6$ (g)
- De la 4ª inecuación se obtiene otro límite de la región: $y \le 2x$ (h)
- De la 5ª inecuación se obtiene el límite mínimo del concentrado A (x), puesto que: $x \ge 0$ (ec1)
- De la 6ª inecuación se obtiene el límite mínimo del concentrado B (y), puesto que: $y \ge 0$ (*f*)

Los vértices son las intersecciones entre las rectas:

A = (0, 0) B = (3, 6) C = (5, 6) D = (10, 3) E = (10, 0)

b) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

Autor: Oscar Rey Clemente
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Se puede comprobar que el punto (7, 5) no está dentro de la región representada en el apartado anterior y, por lo tanto:

No es posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

También podemos comprobar si se cumplen las inecuaciones propuestas:

$$\begin{cases} 4.5x + 7.5y \leq 67.5 \rightarrow 69 \leq 67.5 \rightarrow FALSO \\ 3x \leq 30 \rightarrow 21 \leq 30 \rightarrow CIERTO \\ 1.5y \leq 9 \rightarrow 7.5 \leq 9 \rightarrow CIERTO \\ x \geq y/2 \rightarrow 7 \geq 2.5 \rightarrow CIERTO \\ x \geq 0 \rightarrow 7 \geq 0 \rightarrow CIERTO \\ y \geq 0 \rightarrow 5 \geq 0 \rightarrow CIERTO \end{cases}$$

c) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo de tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos kilogramos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

(Por cada kg de concentrado)	**Colombia**	**Etiopía**	**Costa Rica**	**Beneficio**
Concentrado A (x)	4.5 kg	3 kg		2€/kg
Concentrado B (y)	7.5 kg		1.5 kg	4€/kg
Total disponible	67.5 kg	30 kg	9 kg	

Si calculamos el beneficio para los valores máximos de *(x,y)* de la región representada en el primer apartado: $F(x, y) = 2x + 4y$

- $F(A) = F(0, 0) = 0$
- $F(B) = F(3, 6) = 30$
- $F(C) = F(5, 6) = 34$
- $F(D) = F(10, 3) = 32$
- $F(E) = F(10, 0) = 20$

Luego, se deben fabricar **5 kg** del concentrado del tipo A y **6 kg** del concentrado del tipo B para obtener el máximo beneficio, siendo éste de **34 €**.

EJERCICIO 2

De una cierta función f, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

a) *Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.*
b) *Determine la curvatura de f y halle la abscisa de su punto de inflexión.*
c) *Calcule la función f, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (-1, 3).*

Solución:

De una cierta función *f*, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

a) Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, y calculamos la abscisa de sus extremos relativos.

En primer lugar, igualamos la derivada a cero, obtenemos los posibles puntos de inflexión y estudiamos crecimiento o decrecimiento en cada intervalo.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1;\ x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo f'	+	–	+
Función f	C	D	C

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y en el $(1, +\infty)$, y es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$. Tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

b) Determinamos la curvatura de *f* y hallamos la abscisa de su punto de inflexión.

Calculamos la segunda derivada e igualamos a cero: $f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
Signo f''	–	+
Función f	Cóncava	Convexa

La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, 0)$ y convexa en el intervalo $(0, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

c) Calcule la función *f*, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (–1, 3).

En primer lugar, calculamos la integral de f':

$$f(x) = \int f'(x)\cdot dx = \int (3x^2 - 3)\cdot dx = 3\frac{x^3}{3} - 3x + C = x^3 - 3x + C$$

Como sabemos que la función pasa por el punto (–1, 3), entonces:

$$f(-1) = 3 \to (-1)^3 - 3(-1) + C = 3 \to C = 1$$

Por lo tanto, la función es: $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x + 1}$

Autor: Oscar Rey Clemente
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

EJERCICIO 3

De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$P(A \cap B) = 0.2 \qquad P(A \cup B) = 0.4 \qquad P(A / B) = 0.8$$

a) *Calcule $P(B)$ y $P(A)$.*
b) *¿Son los sucesos A y B independientes? Razone la respuesta.*
c) *Calcule $P(A^c \cup B^c)$.*

Solución:

De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$P(A \cap B) = 0.2 \qquad P(A \cup B) = 0.4 \qquad P(A / B) = 0.8$$

a) Calcule $P(B)$ y $P(A)$.

Sabemos que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow 0.8 = \frac{0.2}{P(B)} \rightarrow P(B) = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow 0.4 = P(A) + 0.25 - 0.2 \rightarrow P(A) = 0.35$$

$$\boldsymbol{P(B) = 0.25, P(A) = 0.35}$$

b) ¿Son los sucesos A y B $i$ndependientes? Razone la respuesta.

Los sucesos son independientes si se cumple que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$\left.\begin{array}{r} P(A \cap B) = 0.2 \\ P(A) \cdot P(B) = 0.35 \cdot 0.25 = 0.0875 \end{array}\right\} \rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Luego son dependientes.

c) Calcule $P(A^c \cup B^c)$.

$$P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$\boldsymbol{P(A^c \cup B^c) = 0.8}$$

EJERCICIO 4

Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22 % de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a) Para un nivel de confianza del 92 %, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.

b) Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizados por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 92 %, calculamos un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$P = \frac{22}{100} = 0.22$$

$$\frac{1+0.92}{2} = 0.96 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.755$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0.22 - 1.755 \cdot \sqrt{\frac{0.22\cdot 0.78}{50}}, 0.22 - 1.755 \cdot \sqrt{\frac{0.22\cdot 0.78}{50}}\right) = (0.1175, 0.3225)$$

$$\boldsymbol{I.C. = (0.1175, 0.3225)}$$

b) Determinamos cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizados por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.

$$E = 0.03 = 1.755 \cdot \sqrt{\frac{0.22\cdot 0.78}{n}} \rightarrow n = 587.25 \cong 588\ expedientes$$

$$\text{Número de expedientes} \ = \ n = 587.25 \cong \mathbf{588}\ expedientes$$