Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSSII	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Se proponen seis preguntas de las que el estudiante debe resolver tres a su elección.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
CALIFICACIÓN: La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1: *(10 puntos)*

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\-1&0&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-2\\-1&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\\1&3\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&1&0\\3&-1&0\end{pmatrix}$$

a. *(3 puntos)* ¿Es posible calcular $(BA)^2$?. Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.
b. *(3 puntos)* Encontrar, si existe, una matriz X que verifique $2X+3B=2C$
c. *(4 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

Problema 2: *(10 puntos)*

Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por casa vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en este caso?

Problema.3: *(10 puntos)*

a. *(3 puntos)* Calcular la derivada de

$$f(x)=e^{3x^2-5x}$$

b. *(3 puntos)* Calcular

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}$$

c. *(4 puntos)* Calcular

$$\int_0^2\left(3x^2-\frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right)dx$$

Problema 4: *(10 puntos)*

El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula

$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100)$$

Donde $x \in [2, 15]$es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y C es el coste unitario (en euros)

Calcular

- **a.** *(1 punto)* Si se producen 5000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?
- **b.** *(4 puntos)* ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x \in [2, 15]$el coste unitario es inferior a 4 euros?
- **c.** *(5 puntos)* ¿Para qué tamaño de la producción $x \in [2, 15]$se alcanza el coste unitario mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

Problema 5: *(10 puntos)*

En el curso de primero de Bachillerato de un centro educativo se ha hecho una encuesta sobre el destino del viaje de estudios con dos opciones Londres y París. El curso está compuesto por tres clases A, B y C. La clase A tiene 28 estudiantes, de los cuales 12 han votado por Londres y el resto por París. La clase B tiene 25 estudiantes, 10 han votado por Londres y el resto por París, en la clase C, con 23 estudiantes, 18 han votado por Londres y el resto por París.

- **a.** *(2 puntos)* Si elegimos al azar un estudiante del curso, ¿Cuál es la probabilidad de que haya votado por Londres?
- **b.** *(2 puntos)* Si elegimos al azar un estudiante de entre los que han votado por Londres, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?
- **c.** *(3 puntos)* Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) dos estudiantes del curso, ¿Cuál es la probabilidad de que los dos hayan votado por Londres?
- **d.** *(3 puntos)* Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres estudiantes del curso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea uno de cada clase?

Problema 6: *(10 puntos)*

Se sabe que la altura de los estudiantes que se presentan a la EBAU tiene una distribución normal con desviación típica igual a 10 cm. Queremos construir un intervalo de confianza para la media de la altura de los estudiantes

- **a.** *(5 puntos)* Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 97 % tenga una amplitud menor o igual que 4 cm.
- **b.** *(4 puntos)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 9. Medimos a los estudiantes y tenemos los siguientes resultados en cm

  175, 187, 183, 162, 161, 164, 180, 171, 158

  Calcular un intervalo de confianza al 97 % para la media de la altura de los estudiantes que se presentan a la EVAU
- **c.** *(1 punto)* Calcular la varianza de la muestra del apartado b

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valore de $P(Z \leq k)$ para una distribución $N(0,1)$. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&3&2\\-1&0&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-2\\-1&-1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\\1&3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&1&0\\3&-1&0\end{pmatrix}$$

a. *(3 puntos)* ¿Es posible calcular $(BA)^2$? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b. *(3 puntos)* Encontrar, si existe, una matriz X que verifique $2X+3B=2C$

c. *(4 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

Solución:

a) $B\in\mathcal{M}_{3x2}(\mathbb{R}),\ A\in\mathcal{M}_{2x3}(\mathbb{R})\ \Rightarrow$ es posible calcular *BA* y $BA\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Por ser BA una matriz cuadrada de orden 3, también se puede calcular $(BA)^2=(BA).(BA)$ y es una matriz cuadrada de orden 3.

$$BA=\begin{pmatrix}2&0\\-1&-2\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&2\\-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&6&4\\0&-3&0\\-1&-3&-1\end{pmatrix}$$

$$(BA)^2=(BA)\cdot(BA)=\begin{pmatrix}4&6&4\\0&-3&0\\-1&-3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&6&4\\0&-3&0\\-1&-3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&-6&12\\0&9&0\\-3&6&-3\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{(BA)^2=\begin{pmatrix}12&-6&12\\0&9&0\\-3&6&-3\end{pmatrix}}$$

b) $X\in\mathcal{M}_{3x2}(\mathbb{R})$

$$2X+3B=2C\Longrightarrow 2X+3B+(-3)B=2C+(-3)B\Rightarrow 2X=2C+(-3)B\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\frac{1}{2}(2X)=\frac{1}{2}[2C+(-3)B]\Longrightarrow X=\frac{1}{2}[2C+(-3)B]$$

$$2C+(-3)B=\begin{pmatrix}2&-4\\4&2\\2&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&0\\3&6\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-4\\7&8\\5&9\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}[2C+(-3)B]=\begin{pmatrix}-2&-2\\\frac{7}{2}&4\\\frac{5}{2}&\frac{9}{2}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}-2&-2\\\frac{7}{2}&4\\\frac{5}{2}&\frac{9}{2}\end{pmatrix}}$$

c) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det D = |D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \exists D^{-1} == \frac{1}{Det\ D}(Adj\ D)^t$

$$Adj\ D = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

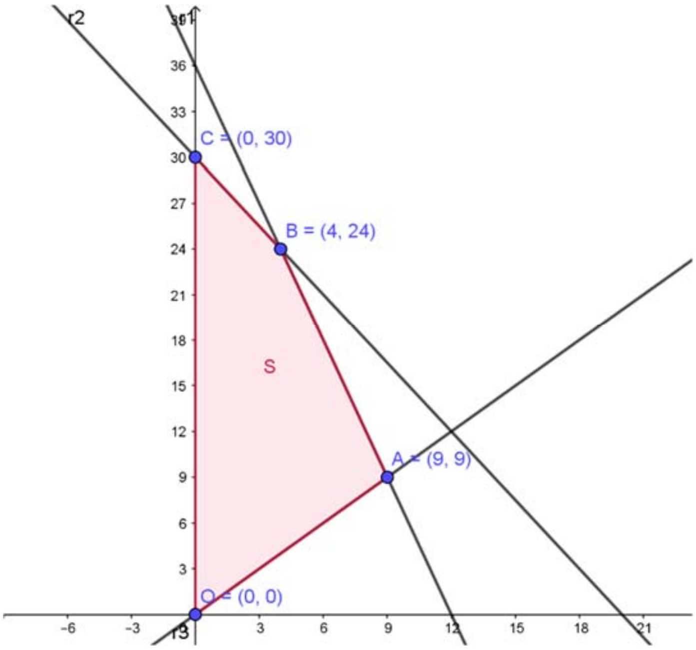
$$D^{-1} == \frac{1}{Det\ D}(Adj\ D)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-4}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Problema 2:

Una modista está organizando su trabajo para el próximo mes. Puede hacer vestidos de fiesta y vestidos de calle. Cada vestido de fiesta necesita 3 metros de tela y lleva 6 horas de trabajo, mientras que cada vestido de calle necesita 1 metro de tela y lleva 4 horas de trabajo. La modista dispone, como máximo, de 36 metros de tela y 120 horas de trabajo, y no quiere hacer más vestidos de fiesta que de calle. Por casa vestido de fiesta, obtiene un beneficio de 100 euros, mientras que por cada vestido de calle obtiene un beneficio de 65 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos vestidos de cada tipo tiene que hacer para maximizar su beneficio. ¿Cuál será el beneficio en este caso?

Solución:



Sean: $x =$ número de vestidos de fiesta

$y =$ número de vestidos de calle

Nuestro objetivo es maximizar la función objetivo, (que representa el beneficio en miles de €)

$$Z = F(x, y) = 100x + 65y$$

sometida a las siguientes restricciones:

$$S \equiv \begin{cases} I_1: 3x + y \leq 36 \\ I_2: 6x + 4y \leq 120 \\ I_3: x \leq y \\ I_4: x \geq 0 \\ I_5: y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la solución de este sistema de inecuaciones. Vamos a resolverlo.

Las dos últimas inecuaciones restringen esta solución al primer cuadrante.

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $3x + y = 36$ que pasa por los puntos (0, 36) y (12, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 $(3.0+0 \leq 36) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $6x + 4y = 120$ que pasa por los puntos (0, 30) y (12, 12). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 $(6.0+4.0 \leq 120) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $y = x$ que pasa por los puntos (0, 0) y (12, 12). El punto M (0, 3) cumple la inecuación I_3 $(0 \leq 3) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a M.

La región factible es el polígono $OABC$, intersección de estos cuatro semiplanos y la solución óptima se encuentra en uno de sus vértices.

Determinamos sus coordenadas

$$A \equiv \begin{cases} y = x \\ 3x + y = 36 \end{cases} \sim \begin{cases} y = x \\ 4x = 36 \end{cases} \sim \begin{cases} y = x \\ x = 9 \end{cases} \Rightarrow \quad A = (9, 9)$$

$$B \equiv \begin{cases} \begin{cases} 6x + 4y = 120 \\ 3x + y = 36 \end{cases} \sim \begin{cases} 6x + 4y = 120 \\ -12x - 4y = -144 \end{cases} \sim \begin{cases} 6x + 4y = 120 \\ -6x = -24 \end{cases} \sim \begin{cases} y = \dfrac{120 - 6x}{4} \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} y = \dfrac{96}{4} = 24 \\ x = 4 \end{cases} \Longrightarrow B = (4, 24) \end{cases}$$

$$C \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 6x + 4y = 120 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{120-6x}{4} = 30 \end{cases} \Rightarrow \; C = (0, 30)$$

$$O \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow O = (0, 0)$$

Según el teorema fundamental de la programación lineal, la solución, si existe, se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Valoremos la función objetivo en cada uno de ellos:

$z(O) = F(0,0) = 100.0 + 65.0 = 0$

$z(A) = F(9, 9) = 100.9 + 65.9 = 1485$

$z(B) = F(4, 24) = 100.4 + 65.24 = 1960$

$z(C) = F(0, 30) = 100.0 + 65.30 = 1950$

La solución se alcanza en el vértice B. Por tanto:

Deben realizarse **4** vestidos de fiesta y **24** vestidos de calle para maximizar el beneficio y será en este caso de **1 960 €.**

Problema.3:

a. *(3 puntos)* Calcular la derivada de

$$f(x) = e^{3x^2-5x}$$

b. *(3 puntos)* Calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}}$$

c. *(4 puntos)* Calcular

$$\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx$$

Solución:

a. $f(x) = e^{3x^2-5x} \Longrightarrow f'(x) = (6x-5)\cdot e^{3x^2-5x}$

$$\boldsymbol{f'(x) = (6x-5)\cdot e^{3x^2-5x}}$$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{16x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{16+\frac{5}{x^2}}} = \frac{3}{4}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{3x+2}{\sqrt{16x^2+5}} = \frac{3}{4}}$$

c. $\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx = \int_0^2 \left(3x^2 - \frac{2}{4}\,\frac{4}{2\sqrt{4x+1}}\right) dx = \left[x^3 - \frac{1}{2}\sqrt{4x+1}\right]_0^2 =$

$$2^3 - \frac{1}{2}\sqrt{8+1} - \left(0 - \frac{1}{2}\sqrt{0+1}\right) = 8 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 7$$

$$\boldsymbol{\int_0^2 \left(3x^2 - \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\right) dx = 7}$$

Problema 4

El coste unitario de fabricación de un producto (en euros) depende del tamaño de la producción a través de la siguiente fórmula

$$C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100)$$

Donde $x \in [2, 15]$es el tamaño de la producción (en miles de unidades) y C es el coste unitario (en euros).

Calcular

a) *(1 punto)* Si se producen 5 000 unidades, ¿cuánto vale el coste unitario?

b) *(4 puntos)* ¿Para qué valores del tamaño de la producción $x \in [2, 15]$ el coste unitario es inferior a 4 euros?

c) *(5 puntos)* ¿Para qué tamaño de la producción $x \in [2, 15]$se alcanza el coste unitario mínimo? ¿Y el máximo? ¿Cuánto valen estos costes?

Solución:

a) 5 000 unidades = 5 miles de unidades

$$\boldsymbol{C(5) = \frac{1}{10}(5^2 - 16.5 + 100) = 4.5} \text{ €.}$$

El coste unitario es de **4.5 €.**

b) $C(x) = \frac{1}{10}(x^2 - 16x + 100) < 4 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 100 < 40 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 60 < 0$

$$x^2 - 16x + 60 = 0 \Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 10 \\ \searrow 6 \end{matrix}$$

[2, 6)	6	(6, 10)	10	(10, 15]	
+	0	-	0	+	Signo $x^2 - 16x + 60$

Luego $C(x) < 4 \Leftrightarrow x \in (6, 10)$, es decir:

El coste se mantiene por debajo de 4 € si el número de unidades fabricadas es mayor que 6 000 y menor de 10 000.

c) Las funciones polinómicas son continuas y derivables en $\mathbb{R} \Rightarrow$ la función coste C es continua y derivable en el intervalo $[2, 15]$ y $C'(x) = \frac{1}{10}(2x - 16)$

[2, 8)	8	(8, 15]	
-	0	+	Signo C'
Decrece	Mínimo relativo	Crece	Monotonía C

$$\boldsymbol{C'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{10}(2x - 16) = 0 \Rightarrow x = 8}$$

Los extremos absolutos de la función C se alcanzan en los extremos del intervalo o en los extremos relativos. Evaluamos C en las abscisas 2, 5, 8

$$\boldsymbol{C(2) = \frac{1}{10}(2^2 - 16.2 + 100) = 7.2}$$

$$\boldsymbol{C(8) = \frac{1}{10}(8^2 - 16.8 + 100) = 3.6}$$

$$\boldsymbol{C(15) = \frac{1}{10}(15^2 - 16.15 + 100) = 8.5}$$

El coste mínimo se alcanza si producen **8 000** unidades y es de **3.6 €**. El coste es máximo si se producen **15 000** unidades y es de **8.5 €**.

Problema 5:

En el curso de primero de Bachillerato de un centro educativo se ha hecho una encuesta sobre el destino del viaje de estudios con dos opciones Londres y París. El curso está compuesto por tres clases A, B y C. La clase A tiene 28 estudiantes, de los cuales 12 han votado por Londres y el resto por París. La clase B tiene 25 estudiantes, 10 han votado por Londres y el resto por París, en la clase C, con 23 estudiantes, 18 han votado por Londres y el resto por París.

a. *(2 puntos)* Si elegimos al azar un estudiante del curso, ¿Cuál es la probabilidad de que haya votado por Londres?

b. *(2 puntos)* Si elegimos al azar un estudiante de entre los que han votado por Londres, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la clase B?

c. *(3 puntos)* Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) dos estudiantes del curso, ¿Cuál es la probabilidad de que los dos hayan votado por Londres?

d. *(3 puntos)* Si elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres estudiantes del curso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea uno de cada clase?

Solución:

Sean los sucesos:

A = "el alumno elegido al azar pertenece a la clase A" $P(A) = \frac{28}{28+25+23} = \frac{28}{76}$

B = "el alumno elegido al azar pertenece a la clase B" $P(B) = \frac{25}{28+25+23} = \frac{25}{76}$

C = "el alumno elegido al azar pertenece a la clase C" $P(C) = \frac{23}{28+25+23} = \frac{23}{76}$

L = "el alumno elegido al azar ha votado por Londres"

$$P(L/A) = \frac{12}{28} \qquad P(L/B) = \frac{10}{25} \qquad P(L/C) = \frac{18}{23}$$

a. Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(L) = P(L/A)P(A) + P(L/B)P(B) + P(L/C)P(C) = \frac{12}{28}\cdot\frac{28}{76} + \frac{10}{25}\cdot\frac{25}{76} + \frac{18}{23}\cdot\frac{23}{76} = \frac{40}{76} = \frac{10}{19} \approx 0.5263$$

La probabilidad de que haya votado por Londres es de **0.53**.

b. Decir que el alumno elegido ha votado Londres, equivale a decir que ha ocurrido el suceso L. Nos piden, por tanto, $P(B/L)$

$$P(B/L) = \frac{P(L/B)P(B)}{P(L)} = \frac{\frac{10}{25}\cdot\frac{25}{76}}{\frac{10}{19}} = \frac{19}{76} = 0.25$$

$$\boldsymbol{P(B/L) = 0.25}$$

c. Representemos por L_i= "el alumno elegido en el lugar *i*, ha elegido Londres" *i* = 1, 2

Del total de alumnos: 28 + 25 + 23 = 76, han elegido Londres: 12 + 10 + 18 = 40.

$$P(\text{"los dos alumnos hayan votado por Londres"}) = P(L_1 \cap L_2) = P(L_1)\,P(L_2/L_1) = \frac{40}{76}\,\frac{39}{75} = \frac{26}{95} \approx 0.2737.$$

$$P(\text{"los dos alumnos hayan votado por Londres"}) = \frac{26}{95} \approx \mathbf{0.27}.$$

d. Representemos por A_i, B_i, C_i con $i = 1, 2, 3$ los sucesos "el alumno elegido en lugar i es de la clase A, B o C" respectivamente.

$$P(\text{"... sea un alumno de cada clase"}) = P(A_1 \cap B_2 \cap C_3) + P(A_1 \cap C_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap C_3) +$$

$$+ P(B_1 \cap C_2 \cap A_3) + P(C_1 \cap A_2 \cap B_3) + P(C_1 \cap B_2 \cap A_3) = 6 \cdot \frac{28}{76}\cdot\frac{25}{75}\cdot\frac{23}{74} = \frac{96600}{421800} = \frac{161}{703} \approx 0.2290$$

$$P(\text{"... sea un alumno de cada clase"}) = \frac{161}{703} \approx \mathbf{0.23}$$

Problema 6: *(10 puntos)*

Se sabe que la altura de los estudiantes que se presentan a la EBAU tiene una distribución normal con desviación típica igual a 10 cm. Queremos construir un intervalo de confianza para la media de la altura de los estudiantes

a. *(5 puntos)* Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 97 % tenga una amplitud menor o igual que 4 cm.

b. *(4 puntos)* Decidimos tomar una muestra de tamaño 9. Medimos a los estudiantes y tenemos los siguientes resultados en cm

175, 187, 183, 162, 161, 164, 180, 171, 158

Calcular un intervalo de confianza al 97 % para la media de la altura de los estudiantes que se presentan a la EBAU

c. *(1 punto)* Calcular la varianza de la muestra del apartado b

Solución:

Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 97 %:

$$1-\alpha = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 0{,}03 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985$$

El valor más cercano en la tabla es 0.9850 correspondiente a $z_{\alpha/2} = 2.17$

a) La amplitud del intervalo debe ser menor que 4 ⇒ el error máximo admisible $E \leq 2$.

$$E = z_{\alpha/2}\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 2 \ \Rightarrow\ 2.17\ .\frac{10}{\sqrt{n}} \leq 2 \ \Rightarrow 21.7 \leq 2\sqrt{n},\ \ n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \frac{21.7}{2} \leq \sqrt{n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{n} \geq 10.85 \Rightarrow n \geq 10.85^2 \Rightarrow n \geq 117.7225$$

La muestra debe ser al menos de **118** estudiantes.

b) La media de la muestra es

$$\bar{x} = \frac{175+187+183+162+161+164+180+171+158}{9} = \frac{1541}{9} = 171.22$$

Y el intervalo de confianza:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(171.22 - 2.17\,\frac{10}{\sqrt{9}},\ 171.22 + 2.17\,\frac{10}{\sqrt{9}}\right) = (163.9867, 178.4533)$$

Intervalo de confianza: $(\mathbf{163.99}, \mathbf{178.45})$

c) Denotamos por s^2 la varianza de la muestra

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{{x_i}^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{175^2+187^2+183^2+162^2+161^2+164^2+180^2+171^2+158^2}{9} - 171.22^2$$
$$= \frac{264749}{9} - 29316.2884 = 29416.5556 - 29316.2884 = 100.2671 \approx 100.27$$

La varianza de la muestra es $s^2 = \mathbf{100.27}$

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSSII	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Se proponen seis preguntas de las que el estudiante debe resolver tres a su elección.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

CALIFICACIÓN: La nota final será la suma de las puntuaciones obtenidas en las tres preguntas, dividida por tres.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1: *(10 puntos)*

Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamiento, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica una 1 hora, corre 15 km y consume 1 200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3horas, corre 30 km y consume 2 500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

Problema 2: *(10 puntos)*

En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo

Problema.3: *(10 puntos)*

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1}$$

Calcular

a) *(1 punto)* Dominio de f
b) *(3 puntos)* ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) < 0$?
c) *(2 puntos)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
d) *(4 puntos)* Máximos y mínimos relativos de f

Problema 4: *(10 puntos)*

Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x+1} & si\ x < -1 \\ x^3 - 4x^2 + 2x - 10 & si\ -1 \le x \le 4 \\ \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x & si\ x > 4 \end{cases}$$

a) *(3 puntos)* Estudiar la continuidad de f.
b) *(4,5 puntos)* Calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$
c) *(2,5 puntos)* Calcular $\int_1^2 f(x)dx$

Problema 5: *(10 puntos)*

En una bolsa tenemos 8 bolas: 3 blancas, 1 roja y 4 negras. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento.

Calcular:

a) *(2 puntos)* La probabilidad de que las dos sean blancas.
b) *(3 puntos)* La probabilidad de que al menos una sea blanca.
c) *(2 puntos)* La probabilidad de que las dos sean del mismo color.
d) *(3 puntos)* Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas.

Problema 6: *(10 puntos)*

El ayuntamiento de una ciudad quiere estimar la proporción de hogares que tiene Internet de alta velocidad. Para ello, va a visitar una muestra aleatoria simple de hogares para saber si tienen Internet de alta velocidad y, a partir de los resultados, va a construir el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 94 %.

a) *(6 puntos)* Si quiere que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,1, ¿qué tamaño de la muestra debe escoger?

b) *(4 puntos)* Decide tomar una muestra de 200 hogares y, de ellos, 112 tienen Internet de alta velocidad. Calcular el intervalo de confianza al 94 % para la proporción de hogares de la ciudad que tienen Internet de alta velocidad

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valore de $P(Z \leq k)$ para una distribución $N(0,1)$. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1: *(10 puntos)*

Un corredor aficionado tiene dos tipos de entrenamientos, el corto y el largo. En cada entrenamiento corto, al que dedica una 1 hora, corre 15 km y consume 1 200 kilocalorías. En cada entrenamiento largo, al que dedica 3 horas, corre 30 km y consume 2 500 kilocalorías. Quiere planificar los entrenamientos del verano de forma que haga al menos 24 entrenamientos, pero no corra más de 660 km ni dedique más de 48 horas, en total. Si su objetivo es maximizar el número total de kilocalorías consumidas, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos entrenamientos de cada tipo tiene que hacer. ¿Cuántas kilocalorías consumirá en ese caso?

Solución:

Sean: $x =$ número de entrenamientos cortos

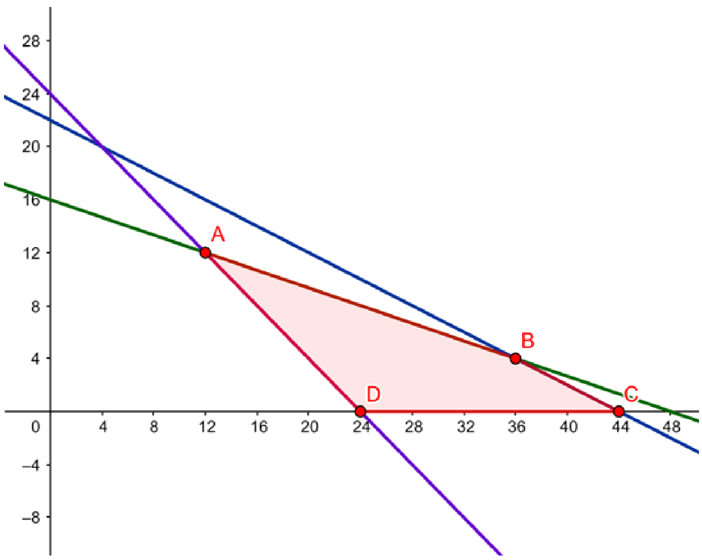
$y =$ número de entrenamientos largos

La función objetivo z debe representar el número total de kilocalorías consumidas. Será entonces

$$z = F(x, y) = 1200x + 2500y$$

Y las restricciones que presenta, vienen dadas por el sistema de inecuaciones:

$$S \equiv \begin{cases} I_1: x + 3y \leq 48 \\ I_2: 15x + 30y \leq 660 \\ I_3: x + y \geq 24 \\ I_4: x \geq 0 \\ I_5: y \geq 0 \end{cases}$$



Obtendremos gráficamente su solución:

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $x + 3y = 48$ que pasa por los puntos (0, 16) y (48, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 $(0{+}3.\,0 \leq 48) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $15x + 30y = 660$ que pasa por los puntos (20, 12) y (36, 4). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_2 $(15.0{+}30.0 \leq 660) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $x + y = 24$ que pasa por los puntos (0, 24) y (24, 0). El punto O (0, 0) **NO** cumple la inecuación I_3 $(0{+}0 < 24) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 no contiene a O.

Las inecuaciones *I_4* e *I_5* restringen a solución al primer cuadrante.

La región factible es el polígono $ABCD$, intersección de los cinco semiplanos y la solución óptima se encuentra en uno de sus vértices.

Determinamos sus coordenadas

$$A = r_1 \cap r_3 \equiv \begin{cases} x + y = 24 \\ x + 3y = 48 \end{cases} \sim \begin{cases} -x - y = -24 \\ x + 3y = 48 \end{cases} \sim \begin{cases} 2y = 24 \\ x = 48 - 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 12 \\ x = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = (12, 12)$$

$$B = r_1 \cap r_2 \equiv \begin{cases} x + 3y = 48 \\ 15x + 30y = 660 \end{cases} \sim \begin{cases} -10x - 30y = -480 \\ 15x + 30y = 660 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x = 180 \\ y = \dfrac{48 - x}{3} \end{cases} \sim \begin{cases} x = 36 \\ y = \dfrac{48 - 36}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 36 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B = (36, 4)$$

$$C = r_2 \cap OX \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 15x + 30y = 660 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{660}{15} = 44 \end{cases} \Rightarrow C = (44, 0)$$

$$D = r_3 \cap OX \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 24 \end{cases} \Rightarrow D = (24, 0)$$

Según el teorema fundamental de la programación lineal, la solución, si existe, se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Valoremos la función objetivo en cada uno de ellos:

$z(A) = F(12,12) = 1200.12 + 2500.12 = 44400$

$z(B) = F(36, 4) = 1200.36 + 2500.4 = 53200$

$z(C) = F(44, 0) = 1200.44 + 2500.0 = 52800$

$z(D) = F(24, 0) = 1200.24 + 2500.0 = 28800$

La función z es máxima en el vértice B. Por tanto, debe realizar 36 entrenamientos cortos y 4 largos para que el número de kilocalorías consumidas sea máximo y serán en este caso 53 200.

Debe realizar **36** entrenamientos cortos y **4** largos para que el número de kilocalorías consumidas sea máximo y serán en este caso **53 200 kilocalorías**.

Problema 2: *(10 puntos)*

En un museo las entradas cuestan 1 euro para los niños, 2 euros para los jóvenes y 5 euros para los adultos. Ayer se recaudaron un total de 600 euros y se sabe que el número de adultos que visitó el museo fue igual al doble de la suma del número de niños más el número de jóvenes; además, si hubiesen visitado el museo 100 jóvenes más, el número de jóvenes habría sido igual a la suma del número de niños más el número de adultos. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de niños, jóvenes y adultos que visitaron el museo

Solución

Sean $\boldsymbol{x}$ = número de entradas de niño, $\boldsymbol{y}$ = número de entradas de joven, $\boldsymbol{z}$= número de entradas de adulto

$$\begin{cases} x+2y+5z=600 \\ z=2(x+y) \\ y+100=x+z \end{cases} \approx \begin{cases} x+2y+5z=600 \\ 2x+2y-z=0 \\ x-y+z=100 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de ecuaciones lineales. La matriz del sistema es:

$$A:B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 600 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 100 \end{pmatrix} \qquad \det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$$

Utilizamos la regla de Cramer para encontrar la solución:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 600 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 100 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{Det\ A}=\frac{-600}{-25}=24 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 600 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 100 & 1 \end{vmatrix}}{Det\ A}=\frac{-700}{-25}=28 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 600 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 100 \end{vmatrix}}{Det\ A}=\frac{-2600}{-25}=104$$

Visitaron el museo **24** niños, **28** jóvenes y **104** adultos.

Problema.3: *(10 puntos)*

Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 12}{x - 1}$$

Calcular

a) *(1 punto)* Dominio de f
b) *(3 puntos)* ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) < 0$?
c) *(2 puntos)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
d) *(4 puntos)* Máximos y mínimos relativos de f

Solución:

a) $Dom\,(f) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}/x - 1 \neq 0\ \} = \mathbb{R} - \{1\}$

$$Dom\,(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

b) $f(x) = \frac{x^2-4x+12}{x-1} < 0$

- $x^2 - 4x + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{4\pm\sqrt{16-48}}{2}$ no tiene solución real $\Rightarrow$ el numerador de la expresión analítica de f tiene signo constante
- $x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

f solo puede cambiar de signo en $x = 1$

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
Signo de f	Negativo	$\nexists$	Positivo

Luego $f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 1)$

$$f(x) < 0 \ \ para \ \ x \in (-\infty, \mathbf{1})$$

c) Empecemos por las verticales

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to1^- \\ x<1}} \frac{x^2-4x+12}{x-1} = \frac{9}{0} = -\infty \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to1^+ \\ x>1}} \frac{x^2-4x+12}{x-1} = \frac{9}{0} = \infty$$

Por lo tanto, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si existen asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+12}{x-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+12}{x-1} = \infty$$

No hay asíntotas horizontales.

Estudiamos ahora la existencia de asíntotas oblicuas. Si existen, tienen la forma $y\ = mx + n$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-4x+12}{x-1} : x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+12}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-4x+12}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+12-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+12}{x-1} = -3$$

La recta $y = x - 3$ es asíntota oblicua en $-\infty$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-4x+12}{x-1} : x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+12}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-4x+12}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+12-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x+12}{x-1} = -3$$

La recta $y = x - 3$ es también asíntota oblicua en ∞.

La recta $\boldsymbol{x = 1}$ es una asíntota vertical. La recta $\boldsymbol{y = x - 3}$ es asíntota oblicua

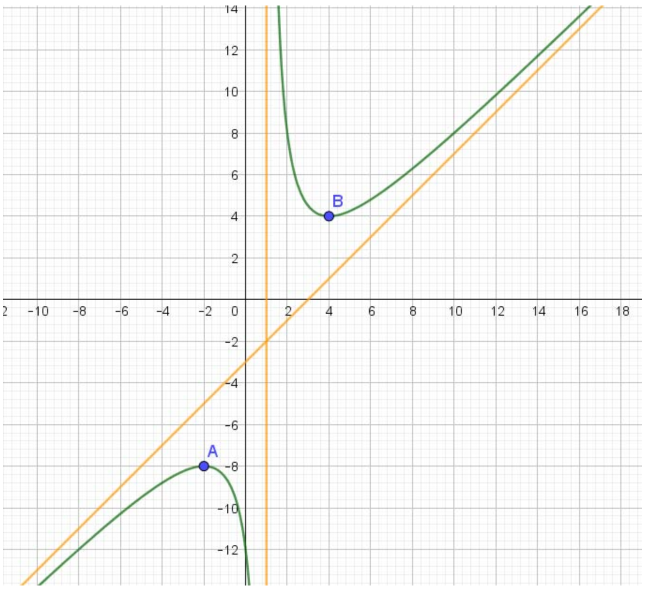
d) $f(x) = \frac{x^2-4x+12}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-4)(x-1)-(x^2-4x+12)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,4)$	4	$(4,\infty)$
Signo f'	+	0	-	$\nexists$	-	0	+
Monotonía de f y extremos relativos	*Creciente*	*Máximo relativo*	*Decreciente*	$\nexists$	*Decreciente*	*Mínimo relativo*	*Creciente*

El punto $(-2,-8)$ es un máximo relativo y el punto $(4,4)$ un mínimo relativo de la función f.

Máximo relativo: $\boldsymbol{(-2,-8)}$. Mínimo relativo: $\boldsymbol{(4,4)}$



Problema 4: *(10 puntos)*

Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x+1} & si\ x < -1 \\ x^3 - 4x^2 + 2x - 10 & si\ -1 \le x \le 4 \\ \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x & si\ x > 4 \end{cases}$$

a) *(3 puntos)* Estudiar la continuidad de f. b) Calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$. c) *(2,5 puntos)* Calcular $\int_1^2 f(x)dx$

Solución:

a) f es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$. Lo demostramos:

- $g(x) = \frac{3}{x+1}$ es una función racional, continua en $\mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow f$ es continua en $(-\infty, -1)$.
- $h(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 10$ es una función polinómica, continua en $\mathbb{R} \Rightarrow$ f es continua en $(-1,\ 4)$.
- $k(x) = \sqrt{4x^2 - 7x} - 2x$ es continua en $\{x \in \mathbb{R}/4x^2 - 7x > 0\} = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{7}{4}, \infty\right) \Rightarrow$

$\Longrightarrow f$ es continua en $(4, \infty)$.

Analicemos ahora si se cumple la definición de continuidad en los valores de cambio:

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \dfrac{3}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^3 - 4x^2 + 2x - 10) = -17 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (x^3 - 4x^2 + 2x - 10) = -2 = f(4) \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \left(\sqrt{4x^2 - 7x} - 2x\right) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4) \quad \Rightarrow \quad f$ es continua en $x = 4$.

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2 - 7x} - 2x\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-7x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2-7x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2-7x}\right)^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-7x-4x^2}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-7x}{\sqrt{4x^2-7x}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{7x}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}}+\frac{2x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-7}{\sqrt{4-\frac{7}{x}}+2} =$

$= \frac{-7}{\sqrt{4+\frac{7}{\infty}}+2} = \frac{-7}{\sqrt{4}+2} = \frac{-7}{4}$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{-7}{4}$$

c) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x^3 - 4x^2 + 2x - 10\,)dx = \left[\underbrace{\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + x^2 - 10x}_{F(x)}\right]_1^2 \underbrace{=}_{Regla\ de\ Barrow}$

$= \underbrace{\left(\frac{2^4}{4} - \frac{4.2^3}{3} + 2^2 - 10.2\right)}_{F(2)} - \underbrace{\left(\frac{1^4}{4} - \frac{4.1^3}{3} + 1^2 - 10.1\right)}_{F(1)} = -\frac{151}{12} = -12.5833$

$$\int_1^2 f(x)dx = -\frac{151}{12}$$

Problema 5: *(10 puntos)*

En una bolsa tenemos 8 bolas: 3 blancas, 1 roja y 4 negras. Extraemos dos bolas sin reemplazamiento.

Calcular:

a) *(2 puntos)* La probabilidad de que las dos sean blancas.
b) *(3 puntos)* La probabilidad de que al menos una sea blanca.
c) *(2 puntos)* La probabilidad de que las dos sean del mismo color.
d) *(3 puntos)* Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas.

Solución:

Describimos, mediante un diagrama en árbol, el espacio muestral

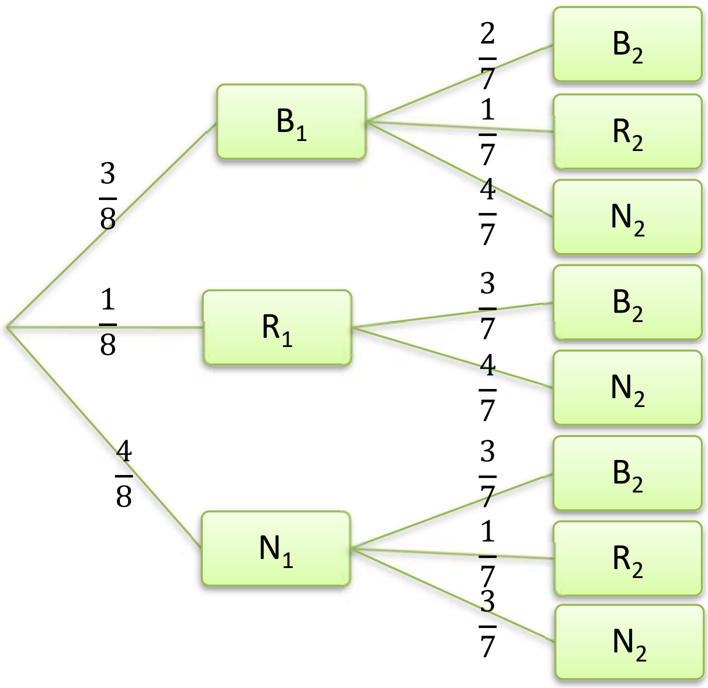
Sean

Bi = "La bola extraída en lugar i es blanca"

Ri = "La bola extraída en lugar i es roja"

Ni = "La bola extraída en lugar i es negra"

Para i = 1,2



a) $P(\text{“las dos bolas extraídas son blancas”}) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28} = 0.10714$

La probabilidad de que las dos sean blancas es igual a $\mathbf{\frac{3}{28}}$.

b) $P(\text{“al menos una bola es blanca”}) = 1 - P(\text{"ninguna bola extraída es blanca"})=$

$$=1-\left[P[\underbrace{(R_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap R_2) \cup (N_1 \cap N_2)}_{(R_1 \cap N_2),(N_1 \cap R_2),(N_1 \cap N_2) \text{ son sucesos incompatibles 2a2}}]\right] = 1-[P(R_1 \cap N_2)+P(N_1 \cap R_2)+P(N_1 \cap N_2)]$$

$$= 1-[P(R_1).P(N_2/R_1)+P(N_1).P(R_2/N_1)+P(N_1).P(N_2/N_1)] = 1-\left[\frac{1}{8}.\frac{4}{7}+\frac{4}{8}.\frac{1}{7}+\frac{4}{8}.\frac{3}{7}\right]=$$

$$= 1-\left[\frac{4}{56}+\frac{4}{56}+\frac{12}{56}\right] = 1-\frac{20}{56} = \frac{36}{56} = \frac{9}{14} = 0.642857$$

La probabilidad de que al menos una sea blanca es igual a $\frac{9}{14}$

c) $P(\text{“}las\ dos\ bolas\ sean\ del\ mismo\ color\text{”}) = P\left[\underbrace{(B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)}_{(B_1 \cap B_2),(N_1 \cap N_2)\ incompatibles}\right] =$

$= P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) + P(N_1) \cdot P(N_2/N_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{18}{56} = \frac{9}{28} =$ 0.321428

La probabilidad de que las dos sean del mismo color es igual a $\mathbf{\frac{9}{28}}$.

d) Llamemos C al suceso del apartado anterior, C = “*las dos bolas son del mismo color*”

$$P((B_1 \cap B_2)/C) = \frac{P[(B_1 \cap B_2) \cap C]}{P(C)} = \frac{P((B_1 \cap B_2)}{P(C)} = \frac{3}{28} : \frac{9}{28} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0.33333$$

Si las dos bolas son del mismo color, la probabilidad de que sean blancas es igual a $\mathbf{\frac{1}{3}}$

Problema 6: *(10 puntos)*

El ayuntamiento de una ciudad quiere estimar la proporción de hogares que tiene Internet de alta velocidad. Para ello, va a visitar una muestra aleatoria simple de hogares para saber si tienen Internet de alta velocidad y, a partir de los resultados, va a construir el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 94 %.

a) *(6 puntos)* Si quiere que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0.1, ¿qué tamaño de la muestra debe escoger?

b) *(4 puntos)* Decide tomar una muestra de 200 hogares y, de ellos, 112 tienen Internet de alta velocidad. Calcular el intervalo de confianza al 94 % para la proporción de hogares de la ciudad que tienen Internet de alta velocidad

Solución:

a) Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 94 %:

$$1-\alpha = 0.94 \Rightarrow \alpha = 0.06 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.97$$

El valor más cercano en la tabla es 0.9699 correspondiente a $z_{\alpha/2} = 1.88$

La amplitud del intervalo de confianza debe ser menor o igual que 0.1 $\Rightarrow$ el error máximo admisible $E \leq 0.05$.

Como no tenemos más información, suponemos $p_r = 0.5$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}} \leq 0.05 \Rightarrow 1.88\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{n}} \leq 0.05 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.25}{n}} \leq \frac{0.05}{1.88} \Rightarrow \frac{0.25}{n} \leq \frac{0.005^2}{1.88^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{0.25\cdot 1.88^2}{0.05^2} \sim 353.44$$

La muestra debe ser al menos de **354** hogares.

b) En este caso $p_r = \frac{112}{200} = 0.56$

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por

$$\left(p_r - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}, p_r + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}\right) = \left(0.56 - 1.88\sqrt{\frac{0.56\cdot 0.44}{200}},\ 0.56 + 1.88\sqrt{\frac{0.56\cdot 0.44}{200}}\right) =$$

$$= (0.56 - 0.066,\ 0.56 + 0.066) = (0.494,\ 0.626)$$

El intervalo de confianza para la proporción es $\mathbf{(0.494,\ 0.626)}$