Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Aragón

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso

Revisión: Soluciones publicadas por la Universidad de Zaragoza

http://matematicasentumundo.es/PAU/PAU.htm

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSSII	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

(*3,25 puntos*) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) (*2 puntos*) ¿Para qué valores de x e y se tiene $AB = C$?

b) (*1,25 puntos*) Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

Problema A.2:

(*3,25 puntos*) El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x) = 12 - \frac{2x-8}{x^2+4x+4}$$

Donde $x \in [0\,,60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:

a) (*0,25 puntos*) El precio de la acción a las nueve y media.

b) (*1 punto*) Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?

c) (*2 puntos*) El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.

Problema A.3:

(*3,5 puntos*) Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91 %.

a) (*2 puntos*) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

b) (*1,5 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91% para la proporción de consumidores que conocen la marca.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

OTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija l más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSSII	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

(3,25 puntos) Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

Problema B.2:

(3,25 puntos)

(2 puntos) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$, con $x \in \Re$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un máximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$

(1,25 puntos) Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2}\right) dx$$

Problema B.3:

(3,5 puntos) Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49.3 % de la población aragonesa son hombres y el 50.7 % son mujeres. Del total de hombres, un 80.9 % tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75.9 % tienen menos de 65 años.

(0,75 puntos) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?

(1 punto) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?

(1 punto) Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

(0,75 puntos) Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?

SOLUCIONES OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) *¿Para qué valores de x e y se tiene $AB = C$?*

b) *Calcular, si existe, la matriz inversa de C.*

Solución:

a) $A\,B = C \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -2x-2y-1 & x-4y \\ -9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2y-1=2 \\ x-4y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+4y=-6 \\ x-4y=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x = 9 \Rightarrow x=\frac{5}{9} \\ y=\frac{-3-2x}{2}=\frac{3}{10} \end{cases}$$

Si $x=\frac{5}{9}$ e $y=\frac{3}{10}$ entonces $AB = C$

b) $Det\ C = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} = -19 \neq 0 \Rightarrow \exists\, C^{-1}$

$Adj\ C = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$C^{-1} = \frac{1}{DetC}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{19} & -\frac{3}{19} \\ -\frac{9}{19} & -\frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C^{-1}} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{19} & -\frac{3}{19} \\ -\frac{9}{19} & -\frac{2}{19} \end{pmatrix}$$

Problema A.2:

El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x) = 12 - \frac{2x-8}{x^2+4x+4}$$

Donde $x \in [0\ ,\ 60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:

a) *El precio de la acción a las nueve y media.*

b) *Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?*

c) *El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.*

Solución:

a) $$P(30) = 12 - \frac{60-8}{30^2+120+4} = 12 - \frac{52}{1024} = 11.95\ €$$

$$\mathbf{P(9:30) = P(30) = 11.95\ €.}$$

b) $$\left.\begin{array}{c} P(x) = 12 - \frac{2x-8}{x^2+4x+4} > 12 \\ x \in [0,60] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 12 - \frac{2x-8}{x^2+4x+4} > 12 \\ x \in [0,60] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \frac{12x^2+46x+56}{x^2+4x+4} > 12 \\ x \in [0,60] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \frac{-2x+8}{x^2+4x+4} > 0 \\ x \in [0,60] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} -2x+8 > 0 \\ x \in [0,60] \end{array}\right\} \Rightarrow x < 4$$

Luego la acción tuvo un valor mayor que 12 € durante **4** minutos, entre las 9 y las 9:04.

c) $$P(x) = 12 - \frac{2x-8}{(x+2)^2} = \frac{12x^2+46x+56}{(x+2)^2} \Rightarrow P'(x) = \frac{(24x+46)(x+2)^2 - 2(x+2)(12x^2+46x+56)}{(x+2)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(x) = \frac{(24x+46)(x+2) \quad -2(12x^2+46x+56)}{(x+2)^3} = \frac{2x-20}{(x+2)^3}$$

$$P'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 10$$

0	$(0,10)$	10	$(10,60)$	60	
$\frac{-20}{27}$	-	0	+	$\frac{100}{62^3}$	*Signo P´*
Decreciente	*Decreciente*	*Mínimo relativo*	*Creciente*	*Creciente*	*Monotonía de P*

Valoremos P en los extremos del intervalo $[0,60]$ y en el mínimo relativo

$$P(0) = \frac{56}{4} = 14\ € \qquad P(10) = \frac{12.10^2+46.10+56}{12^2} = \frac{1716}{144} \sim 11.92€$$

$$P(60) = \frac{12.60^2 + 46.60 + 56}{62^2} = \frac{46016}{3844} \sim 11.97\ €$$

Luego el valor máximo de la acción se alcanza a las **9** de la mañana y el valor mínimo a las **9:10**.

Problema A.3:

Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91 %.

- ***a)*** *Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0.08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?*
- ***b)*** *Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91 % para la proporción de consumidores que conocen la marca.*

Solución:

Calculemos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 91 %:

$$1-\alpha = 0{,}91 \Rightarrow \alpha = 0{,}09 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.955$$

El valor más cercano en la tabla es 0,954 correspondiente a $z_{\alpha/2} = 1.70$

a) La amplitud del intervalo de confianza debe ser menor o igual que 0.08 $\Rightarrow$ el error máximo admisible $E \leq 0.04$.

Suponemos que conoce la marca el 50 % de los individuos y por tanto, $p_r = 0.5$

$$E = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}} \leq 0.04 \Rightarrow 1.70\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{n}} \leq 0.04 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.25}{n}} \leq \frac{0.04}{1{,}7} \Rightarrow \frac{0.25}{n} \leq \frac{0.004^2}{1.7^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{0.25\cdot 1.7^2}{0.004^2} \sim 451.56$$

La muestra debe ser al menos de **452** personas

b) En este caso $p_r = \frac{126}{175} = 0.72$

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por

$$\left(p_r - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}},\ p_r + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}\right) = \left(0.72 - 1.70\sqrt{\frac{0.72\cdot 0.28}{175}},\ 0.72 + 1.70\sqrt{\frac{0.72\cdot 0.28}{175}}\right) =$$

$$= (0.72 - 1.70\sqrt{0.001152},\ 0.72 + 1.70\sqrt{0.001152}) = (0.72 - 0.058,\ 0.72 + 0.058) = (0.662,\ 0.778).$$

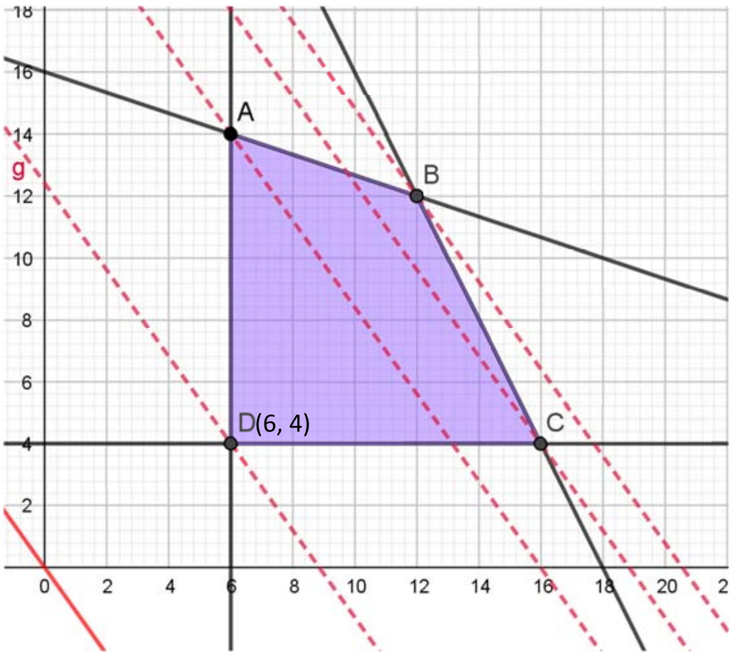
El intervalo de confianza para la proporción viene dado por $(\mathbf{0.662},\ \mathbf{0.778})$

SOLUCIONES OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

Solución:



Se trata de un problema de programación lineal.

Sean $x =$ nº de sillas $y =$ nº de taburetes

La función objetivo es

$$z = F(x, y) = 70x + 50y$$

Pretendemos maximizar z, con las restricciones:

$$\begin{cases} I_1: \quad x \geq 6 \\ I_2: \quad y \geq 4 \\ I_3: 4x + 2y \leq 72 \\ I_4: \quad x + 3y \leq 48 \end{cases}$$

La región factible S es el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones. Lo obtenemos gráficamente.

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $x = 6$, paralela al eje OY. El punto O (0, 0) no cumple la inecuación $I_1 \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 no contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $y = 4$, paralela al eje OX. El punto O (0, 0) no cumple la inecuación $I_2 \Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 no contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $4x + 2y = 72$ que pasa por los puntos (0, 36) y (18, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_3 $(4.0+2.0 \leq 72) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_4 está definido por la recta $x + 3y = 48$ que pasa por (0, 16) y (48, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_4 $(0+3.0 \leq 48) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_4 contiene a O.

La región factible es el polígono $ABCD$, intersección de estos cuatro semiplanos y la solución óptima se encuentra en uno de sus vértices.

Determinamos sus coordenadas

$$A \equiv \begin{cases} x = 6 \\ x + 3y = 48 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 6 \\ 3y = 42 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{42}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad A = (6, 14)$$

$$B \equiv \begin{cases} 4x + 2y = 72 \\ x + 3y = 48 \end{cases} \sim \begin{cases} 4x + 2y = 72 \\ -4x - 12y = -192 \end{cases} \sim \begin{cases} -10y = -120 \\ x = -3y + 48 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 12 \\ x = -36 + 48 \end{cases} \Rightarrow B = (12, 12)$$

$$C \equiv \begin{cases} y = 4 \\ 4x + 2y = 72 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 4 \\ x = \frac{-2y+72}{4} \end{cases} \Rightarrow \ C = (16, 4)$$

$$D \equiv \begin{cases} y = 4 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow \ D = (6, 4)$$

Valoramos ahora la función objetivo en cada uno de ellos:

$z(A) = 70 \cdot 6 + 50 \cdot 14 = 1\,120$

$z(B) = 70 \cdot 12 + 50 \cdot 12 = 1\,440$

$z(C) = 70 \cdot 16 + 50 \cdot 4 = 1\,320$

$z(D) = 70 \cdot 6 + 50 \cdot 4 = 620$

El beneficio máximo es de **1 440 €** y se alcanza en el punto B. Por tanto, se deben fabricar **12** sillas y **12** taburetes para conseguirlo.

También puede obtenerse la solución gráficamente, trazando paralelas a $z = 0$ desde cada uno de los vértices de la región factible.

La paralela a la recta $z = 0$, trazada desde el vértice B es la que tiene mayor ordenada en el origen.

Problema B.2:

a) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$, con $x \in \Re$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un máximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$

b) Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2}\right) dx$$

Solución:

$a)\ f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$ es una función continua y derivable en $\Re$ para $\forall\, a, b \in \Re$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ tiene en } x = -2 \text{ un máximo relativo} \Rightarrow f'(-2) = 3a(-2)^2 + 2b(-2) + 3 = 0 \\ f(-2) = -6 \quad \Rightarrow \quad a(-2)^3 + b(-2)^2 + 3(-2) - 6 = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12a - 4b = -3 \\ -8a + 4b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 3 \\ b = \frac{6+8a}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases}$$

Para que f tenga un máximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$ debe valer $\boldsymbol{a = \frac{3}{4}}$ y $\boldsymbol{b = 3}$.

$$b)\ \int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2}\right) dx = \left[\frac{5\sqrt{8x^2+1}}{8} - \frac{3e^{-4x^2}}{-8}\right]_0^1 = \left[\frac{5\sqrt{8x^2+1}+3e^{-4x^2}}{8}\right]_0^1 = \frac{5\sqrt{9}+3e^{-4}-(5+3)}{8} = \frac{7+3e^{-4}}{8}$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2}\right) dx = \frac{7+3e^{-4}}{8}}$$

Problema B.3:

Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49.3 % de la población aragonesa son hombres y el 50.7 % son mujeres. Del total de hombres, un 80.9% tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75.9 % tienen menos de 65 años.

a) *Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?*

b) *Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?*

c) *Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?*

d) *Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?*

Solución:

Sean los sucesos

A_1 =" la persona aragonesa elegida al azar es hombre" $P(A_1) = 0.493$

A_2 = "la persona aragonesa elegida al azar, es mujer" $P(A_2) = 0.507$

B = "la persona aragonesa elegida al azar, tiene menos de 65 años"

$$P(B/A_1) = 0.809 \qquad P(B/A_2) = 0.759$$

a) $A_2 \cap B$ = "ser una mujer de menos de 65 años"

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \cdot P(B/A_2) = 0.507 \cdot 0.759 = 0.384813.$$

$$\boldsymbol{P(A_2 \cap B) = 0.384813.}$$

b) $P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) = 0.809 \cdot 0.493 + 0.384813 = 0.78365.$

$$\boldsymbol{P(B) = 0.78365.}$$

c) Si ha ocurrido B, la probabilidad de que la persona elegida al azar sea mujer es:

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.384813}{0.78365} \sim 0.491$$

$$\boldsymbol{P(A_2/B) \sim 0.491}$$

d) El suceso "al menos una de las tres personas elegida es mujer" es el contrario de "ninguna persona elegida es mujer".

Si la elección se realiza con reemplazamiento, los sucesos:

M_i= "la persona elegida en el lugar *i* es mujer" *i = 1, 2, 3* son independientes.

$P(\text{“}ninguna\ persona\ elegida\ es\ mujer\text{”}) = P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}) = P(\overline{M_1})\, P(\overline{M_2}) P(\overline{M_3}) = 0.493 \cdot 0.493 \cdot 0.493 \sim 0.12$

$P(\text{“}al\ menos\ una\ de\ las\ tres\ personas\ elegida\ es\ mujer\text{”}) = 1 - P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \overline{M_3}) \sim 1 - 0.12 = 0.88$

$$P(\text{“}al\ menos\ una\ de\ las\ tres\ personas\ elegida\ es\ mujer\text{”}) = \boldsymbol{0.88}$$

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSSII	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

(*3,25 puntos*) Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kilo de manzanas, 5 kilos de naranjas y 1 kilo de peras, mientras que el lote B incluye 4 kilos de manzanas, 2 kilos de naranjas y 1 kilo de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas, 30 kilos de naranjas y 12 kilos de peras, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso?

Problema A.2:

(*3,5 puntos*) Dada la función

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1}$$

a) (*0,25 puntos*) Dominio de f.
b) (*0,75 puntos*) ¿Para qué valores de x se cumple $f(x) = 5$.
c) (*1 punto*) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
d) (*1,25 puntos*) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Problema A.3:

(*3,5 puntos*)

Se sabe que el peso de las manzanas de un agricultor tiene distribución normal con desviación típica igual a 20 g. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas del agricultor.

a) (*2 puntos*) Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 93% tenga una amplitud menor o igual que 8 g.
b) (*1,5 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño 12. Pesamos las manzanas y obtenemos los siguientes resultados (en gramos)

178, 221, 196, 231, 210, 168, 203, 186, 196, 214, 230, 224

Calcular un intervalo de confianza al 93% para la media del peso de las manzanas del agricultor.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSSII	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

(*3,25 puntos*) Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

Problema B.2:

(*3,5 puntos*)

a) (*2 puntos*) Tenemos 4000 euros para invertir en dos fondos M y N. Sea x la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo M e y la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo N; así, se cumple $x+y=4$. El beneficio que se obtiene, en euros, viene dado por

$$B = 10(2x+1)^2 y$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en cada fondo para obtener el máximo beneficio y cuál será ese beneficio máximo.

b) (*1,25 puntos*) Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right) dx$$

Problema B.3:

(*3,5 puntos*) Una empresa tiene 64 trabajadores repartidos en tres departamentos: Administración, Producción y Ventas. Se ha hecho un estudio sobre si los trabajadores saben inglés o no, con los siguientes resultados:

	Administración	Producción	Ventas
Sabe inglés	12	30	6
No sabe inglés	4	11	1

a)(*1 punto*) Elegimos al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

b) (*1 punto*) Elegimos al azar un trabajador de entre los que saben inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea del departamento de Ventas?

c) (*0,75 puntos*) Elegimos al azar un trabajador de la empresa. Sea A el suceso "el trabajador es del departamento de Administración" y B el suceso "el trabajador sabe inglés". ¿Son los sucesos A y B independientes?

d) (*0,75 puntos*) Elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres trabajadores de la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo departamento?

SOLUCIONES OPCIÓN A DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye 1 kilo de manzanas, 5 kilos de naranjas y 1 kilo de peras, mientras que el lote B incluye 4 kilos de manzanas, 2 kilos de naranjas y 1 kilo de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener, al menos, 24 kilos de manzanas, 30 kilos de naranjas y 12 kilos de peras, plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso?

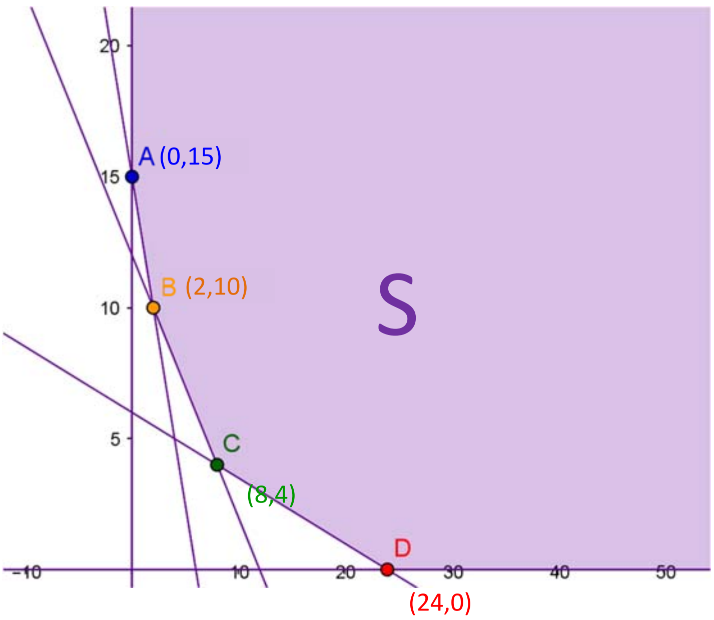
Solución:

Sean $x =$ nº lotes tipo A $\quad y =$ nº de lotes tipo B. La función objetivo es

$$z = F(x, y) = 8x + 10y$$

Pretendemos minimizar z, con las restricciones:

$$\begin{cases} I_1: & x \geq 0 \\ I_2: & y \geq 0 \\ I_3: & x + 4y \geq 24 \\ I_4: & 5x + 2y \geq 30 \\ I_5: & x + y \geq 12 \end{cases}$$



Las dos primeras inecuaciones situan a la solución del sistema en la zona positiva de los dos ejes de coordenadas.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $x + 4y = 24$ que pasa por los puntos (0, 6) y (4, 5). El punto O (0, 0) NO cumple la inecuación I_3 $(0 + 4{\cdot}0 < 24) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 NO contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_4 está definido por la recta $5x + 2y = 30$ que pasa por los puntos (0, 15) y (6, 0). El punto O (0, 0) NO cumple la inecuación I_4 $(5{\cdot}0+2{\cdot}0< 24) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_4 NO contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_5 está definido por la recta $x + y = 12$ que pasa por los puntos (0, 12) y (12, 0). El punto O (0, 0) NO cumple la inecuación I_3 $(0 + 0 < 12) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_5 NO contiene a O.

La región factible es el polígono abierto $ABCD$, intersección de estos cinco semiplanos y la solución óptima se encuentra en uno de sus vértices.

Determinamos sus coordenadas

$$A \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 5x + 2y = 30 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 30 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow \quad A = (0, 15)$$

$$B \equiv \begin{cases} 5x + 2y = 30 \\ x + y = 12 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x + 2y = 30 \\ -5x - 5y = -60 \end{cases} \sim \begin{cases} -3y = -30 \\ x = 12 - y \end{cases} \sim \begin{cases} y = 10 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow B = (2, 10)$$

$$C \equiv \begin{cases} x + y = 12 \\ x + 4y = 24 \end{cases} \sim \begin{cases} -x - y = -12 \\ x + 4y = 24 \end{cases} \sim \begin{cases} 3y = 12 \\ x = 24 - 4y \end{cases} \sim \begin{cases} y = 4 \\ x = 8 \end{cases} \Rightarrow C = (8, 4)$$

$$D \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x + 4y = 24 \end{cases} \Rightarrow D = (24, 0)$$

Valoramos ahora la función objetivo en cada uno de ellos:

$z(A) = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 15 = 150$

$z(B) = 8 \cdot 2 + 10 \cdot 10 = 116$

$z(C) = 8 \cdot 8 + 10 \cdot 4 = 104$

$z(D) = 8 \cdot 24 + 10 \cdot 0 = 192$

La solución óptima se alcanza en el punto C. Deberá encargar **8** lotes del tipo A y **10** lotes del tipo B. El gasto será entonces de **104 €**.

Problema A.2:

Dada la función

$$f(x) = \frac{4x^2 + 4x + 5}{2x + 1}$$

a) *Dominio de f.*
b) *¿Para qué valores de x se cumple $f(x) = 5$.*
c) *Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.*
d) *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

Solución:

a) La función es cociente de dos polinomios, luego únicamente no está definida en los puntos en que se anula el denominador

a) $\mathbf{Dom}\ \boldsymbol{f = R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

b) $f(x) = \frac{4x^2+4x+5}{2x+1} = 5 \Rightarrow \frac{4x^2+4x+5}{2x+1} = \frac{5(2x+1)}{2x+1} \Rightarrow 4x^2 + 4x + 5 = 10x + 5 \Rightarrow 4x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(4x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$

$f(x) = 5$ para $\boldsymbol{x = 0}$ y para $\boldsymbol{x = \frac{3}{2}}$

c) Empecemos por estudiar si hay asíntotas verticales

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} \frac{4x^2+4x+5}{2x+1} = \frac{4}{0} = -\infty \qquad \lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} \frac{4x^2+4x+5}{2x+1} = \frac{4}{0} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ La recta $x = -\frac{1}{2}$ es una asíntota vertical

Veamos si hay horizontales

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2+4x+5}{2x+1} = \frac{\infty}{-\infty} = -\infty \qquad \lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{4x^2+4x+5}{2x+1} = \frac{\infty}{\infty} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$La función no tiene asíntotas horizontales.

Estudiamos finalmente la existencia de asíntotas oblicuas $y = mx + n$

$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{4x^2+4x+5}{2x+1} : x\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2+4x+5}{2x^2+x} = \frac{\infty}{\infty} = 2$

$n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{4x^2+4x+5}{2x+1} - 2x\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2+4x+5-4x^2-2x}{2x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x+5}{2x+1} = 1$

Luego la recta $y = 2x + 1$ es asíntota oblicua en -∞

Análogamente $m' = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ y $n' = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = 1 \Rightarrow$ la recta $y = 2x + 1$ es también asíntota oblicua en $+\infty$.

La recta $\boldsymbol{y = 2x + 1}$ es asíntota oblicua.

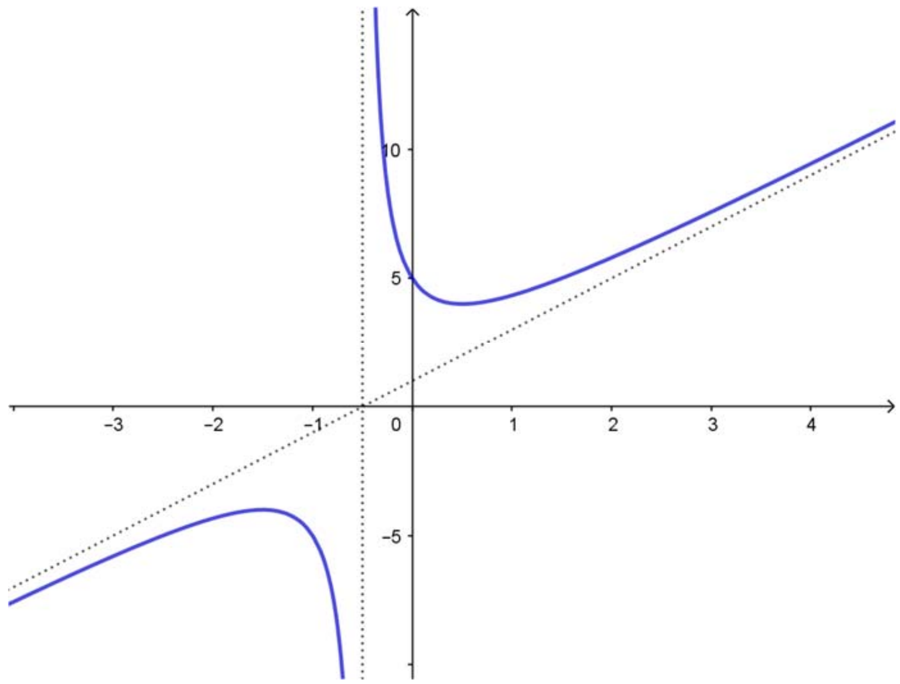
$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$ que es una asíntota vertical.

d) $f(x) = \frac{4x^2+4x+5}{2x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(8x+4)(2x+1)-2(4x^2+4x+5)}{(2x+1)^2} = \frac{8x^2+8x-6}{(2x+1)^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 8x^2 + 8x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8\pm\sqrt{64+192}}{16} = \frac{-8\pm16}{16} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$		$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$	
+		0	-	$\nexists$	-	0	+	*Signo f´*
Creciente		*Máximo relativo*	*Decreciente*	$\nexists$	*Decreciente*	*Mínimo relativo*	*Creciente*	*Monotonía de f*

La función es creciente en $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$



Problema A.3:

Se sabe que el peso de las manzanas de un agricultor tiene distribución normal con desviación típica igual a 20 g. Queremos construir un intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas del agricultor.

a) *Determinar el tamaño de la muestra para que el intervalo de confianza del 93 % tenga una amplitud menor o igual que 8 g.*

b) *Decidimos tomar una muestra de tamaño 12. Pesamos las manzanas y obtenemos los siguientes resultados (en gramos)*

178, 221, 196, 231, 210, 168, 203, 186, 196, 214, 230, 224

Calcular un intervalo de confianza al 93 % para la media del peso de las manzanas del agricultor.

Solución:

Calculemos el valor crítico correspondiente a un nivel de confianza del 93 %:

$$1-\alpha = 0.93 \Rightarrow \alpha = 0.07 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.965$$

El valor más cercano en la tabla es 0.9649 correspondiente a $z_{\alpha/2} = 1.81$

a) El radio el intervalo de confianza es $E = z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y queremos sea menor que $\frac{8}{2} = 4$

$E = 1.81\,\frac{20}{\sqrt{n}} \leq 4$, *n* número natural $\Rightarrow \frac{36.2}{4} \leq \sqrt{n}$, *n* número natural $\Rightarrow 9.05^2 \leq n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 81.9025$\leq n$. El primer número natural que cumple esta desigualdad es 82.

Luego la muestra debe tener al menos 82 manzanas.

b) $\bar{x} = \frac{178+221+196+231+210+168+203+186+196+214+230+224}{12}$ = 204.75

El intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas viene dado por

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(204.75 - 1.81\,\frac{20}{\sqrt{12}}\,,\ 204.75 + 1.81\,\frac{20}{\sqrt{12}}\right) = (194.30\,,\ \ 215.20)$$

El intervalo de confianza para la media del peso de las manzanas viene dado por $(\mathbf{194.30}\,,\ \ \mathbf{215.20})$

SOLUCIONES OPCIÓN B DE LA CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Un hotel tiene habitaciones individuales (para una persona), dobles (para dos personas) y familiares (para cuatro personas). El hotel tiene un total de 144 habitaciones con una capacidad total de 312 personas; además, el número de habitaciones dobles es igual al triple de la suma de habitaciones individuales y familiares. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de habitaciones de cada tipo que tiene el hotel.

Solución:

Sean x= "nº de habitaciones individuales" y = "nº de habitaciones dobles" z= "nº habitaciones familiares"

$$S \equiv \begin{cases} x+y+z &= 144 \\ x+2y+4z &= 312 \\ y = 3(x+z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z &= 144 \\ x+2y+4z &= 312 \\ -3x+y-3z &= 0 \end{cases}$$

$$A:B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 144 \\ 1 & 2 & 4 & 312 \\ -3 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{F'_2{}'=F_2-F_1 \\ F'_3{}'=F_3+3F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 144 \\ 0 & 1 & 3 & 168 \\ 0 & 4 & 0 & 432 \end{pmatrix}$$

El sistema S es equivalente a

$$S' \equiv \begin{cases} x+y+z &= 144 \\ y+3z &= 168 \\ 4y &= 432 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 144 - y - z \\ z = \frac{168-y}{3} \\ y = \frac{432}{4} = 108 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 144 - 108 - 20 = 16 \\ z = \frac{168-108}{3} = 20 \\ y = 108 \end{cases}$$

El hotel tiene 16 habitaciones individuales, 108 habitaciones dobles y 20 familiares.

Autora: Milagros Latasa Asso
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

a) *Tenemos 4000 euros para invertir en dos fondos M y N. Sea x la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo M e y la cantidad, en miles de euros, que invertimos en el fondo N; así, se cumple $x+y=4$. El beneficio que se obtiene, en euros, viene dado por*

$$B = 10(2x+1)^2 y$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en cada fondo para obtener el máximo beneficio y cuál será ese beneficio máximo.

b) *Calcular*

$$\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right) dx$$

Solución

a) $x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$

$B = 10(2x+1)^2 y = 10(2x+1)^2(4-x) = 10(-4x^3 + 12x^2 + 15x + 4)$ función continua y derivable n veces en R, en particular en su dominio $[0, \infty)$, luego podemos determinar sus posibles máximos y mínimos a través del estudio de sus derivadas.

$$B' = 10\,(-12x^2 + 24x + 15) \qquad B'' = 10\,(-24x + 24)$$

$$B' = 0 \Rightarrow -12x^2 + 24x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{-24 \pm \sqrt{1296}}{-24} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \notin [0, \infty), \text{ o } \quad x = \frac{15}{6} = 2.5$$

$$B''\left(\frac{15}{6}\right) = 10\left(-24 \cdot \frac{15}{6} + 24\right) = -360 < 0$$

$$B = 10(2 \cdot 2.5 + 1)^2 1.5 = 540\ €.$$

El beneficio es máximo si se invierten **2 500 €** en el fondo M y **1 500 €** en el N y asciende a **540 €**.

b) $\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right) dx = \int_0^1 \frac{5}{3x+1} dx - \int_0^1 \frac{4}{\sqrt{3x+1}} dx = \left[\frac{5}{3} ln(3x+1)\right]_0^1 - \left[\frac{4.2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^1 =$

$= \frac{5}{3} ln4 - \frac{5}{3} ln1 - \frac{8}{3}\sqrt{4} + \frac{8}{3}\sqrt{1} = \frac{5}{3} ln4 - \frac{16}{3} + \frac{8}{3} = \frac{5}{3} ln4 - \frac{8}{3}$

$$\boldsymbol{\int_0^1 \left(\frac{5}{3x+1} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}}\right) dx = \frac{5}{3} ln4 - \frac{8}{3}}$$

Problema B.3:

Una empresa tiene 64 trabajadores repartidos en tres departamentos: Administración, Producción y Ventas. Se ha hecho un estudio sobre si los trabajadores saben inglés o no, con los siguientes resultados:

	Administración	Producción	Ventas
Sabe inglés	12	30	6
No sabe inglés	4	11	1

a) Elegimos al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

b) *Elegimos al azar un trabajador de entre los que saben inglés, ¿cuál es la probabilidad de que sea del departamento de Ventas?*

c) *Elegimos al azar un trabajador de la empresa. Sea A el suceso "el trabajador es del departamento de Administración" y B el suceso "el trabajador sabe inglés". ¿Son los sucesos A y B independientes?*

d) *Elegimos al azar (sin reemplazamiento) tres trabajadores de la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo departamento?*

Solución

Sean A el suceso "el trabajador es del departamento de Administración", Pr el suceso "el trabajador es del departamento de Producción", V el suceso "el trabajador es del departamento de Ventas" y por último B el suceso "el trabajador sabe inglés".

	Administración	Producción	Ventas	Total
Sabe inglés	12	30	6	48
No sabe inglés	4	11	1	16
Total	16	41	7	64

a) $P(B) = \frac{12+30+6}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$. Podíamos haberlo obtenido también por el teorema de la probabilidad total pero es absurdo, teniendo en cuenta la cantidad de datos que tenemos

$P(B) = P(B/A) \cdot P(A) + P(B/Pr) \cdot P(Pr) + P(B/V) \cdot P(V) = \frac{12}{16} \cdot \frac{16}{64} + \frac{30}{41} \cdot \frac{41}{64} + \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{64} = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}$

$$\boldsymbol{P(B) = \frac{3}{4}}$$

b) $P(V/B) = \frac{P(B \cap V)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{64}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{8}$

$$\boldsymbol{P(V/B) = \frac{1}{8}}$$

c) $P(A \cap B) = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$ $\quad P(A) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ $\quad P(B) = \frac{3}{4}$ $\quad P(A) \,.\, P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$ luego:

A y B son independientes

d) Representemos por A_i, Pr_i, V_i con $i = 1, 2, 3$ los sucesos "el trabajador elegido en lugar i es de Administración, Producción, Ventas" respectivamente.

P("los tres trabajadores sean del mismo Departamento") $= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(Pr_1 \cap Pr_2 \cap Pr_3) + + P(V_1 \cap V_2 \cap V_3) = \frac{16}{64} \cdot \frac{15}{63} \cdot \frac{14}{62} + \frac{41}{64} \cdot \frac{40}{63} \cdot \frac{39}{62} + \frac{7}{64} \cdot \frac{6}{63} \cdot \frac{5}{62} = \frac{67530}{249984} \simeq$ **0.27**