2N ESO

# CAPÍTOL 7: COSSOS GEOMÈTRIC. VOLUMS



www.apuntesmareaverde.org.es


**Autor: Fernando Blasco**

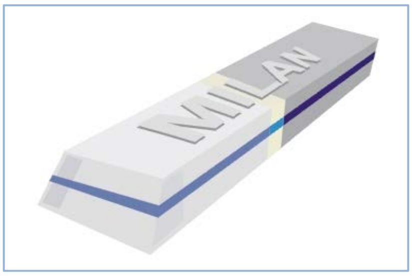
**Revisor: Eduardo Cuchillo i José Gallegos.**

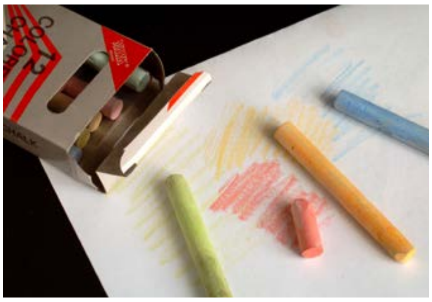
**Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF. Wikipedia Commons**

**Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay**

## Índex





## Resum

Al nostre dia a dia, a la vida real, quasi mai trobem figures planes, sinó que utilitzem objectes tridimensionals.

Una caixa de sabates, una goma d'esborrar o un paquet de clarions són exemples de prismes. El dau del parxís (cub) o el dau d'un joc de rol (icosaedre) són poliedres regulars. De les piràmides no parlem: les que hi ha a Egipte són de tots conegudes. Les llandes de conserves vegetals i les clarions de colors solen ser cilíndriques, hi ha molts gelats amb forma de con i tant les pilotes com les bambolles de sabó tenen forma d'esfera.

Ens interessarà calcular el volum d'aquests cossos (per a saber quant cap al seu interior) i la seua àrea (el que ens permetrà, per exemple, estimar la quantitat de pintura necessària per a recobrir-los).


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

# 1. L'ESPAI

## 1.1. L'entorn en què ens movem

La nostra vida es desenrotlla en un entorn tridimensional: quan comprarem un moble mesurem tres dimensions, per a veure si ens cap a casa: alt, ample i llarg. Inclús els objectes "plans", com un full de paper o un DVD en realitat són tridimensionals, però la seua altura és molt xicoteta i tendim a considerar-los plans.

A pesar que al nostre dia a dia ens trobem objectes tridimensionals, és més difícil estudiar-los perquè no caben en un llibre, llevat que siga un llibre especial amb pàgines desplegables (acabem de dir que les pàgines són bidimensionals). Per això es recorre a fabricar models (en plastilina, cartolina, argila o un altre material) o a utilitzar representacions planes d'aquests objectes.

Una tècnica molt utilitzada en matemàtiques consisteix a aprofitar el que ja sabem per a aprendre els nous conceptes. Per això en aquest tema ens centrarem fonamentalment en cossos geomètrics que s'obtenen a partir de figures planes. Anem a familiaritzar-nos amb aqueixos objectes.

### Activitats resoltes

- *Observa un dau. Quantes cares té? Quina forma tenen les seues cares? Mira ara un paquet de clarions blanques. Quantes cares té? Quina forma tenen? En què s'assemblen el dau i la caixa? En què es diferencien?*

El dau té 6 cares. Cada cara té la forma d'un quadrat.

El paquet de clarions també té 6 cares. Però les cares tenen forma rectangular.

El dau i la caixa s'assemblen en la forma (si la caixa fora de goma i poguérem comprimir-la tant com volguérem, podríem obtindre un dau a partir d'ella). S'assemblen en que tenen ambdues 6 cares. Es diferencien en que a un cas les cares són quadrades i a l'altre rectangulars.

### Activitats proposades

1. Busca una llanda de tomaca fregida i el tros de cartó que hi ha a l'interior d'un rotllo de paper higiènic.

   a) Quina forma tenen les bases de la llanda?

   b) Hi ha cantons angulosos en algun dels objectes?

   c) Fica unes tisores en el cartó del rotllo de paper higiènic i talla. Quina figura plana obtens?

   d) Imagina que vols posar tapa i base al rotllo de cartó perquè tinga la mateixa forma que la llanda de tomaca fregit. Quina figura plana has d'utilitzar?

## 1.2. Dimensions

L'espai involucra tres **dimensions: ample, alt i llarg,** mentre que el pla involucra només a dos.

***Exemple:***

- Un full de grandària A4 mesura 21 cm x 29,7 cm. Donem 2 nombres per a parlar de la seua dimensió.

La caixa on vénen els paquets de 2500 fulls A4 mesura 21 cm x 29,7 cm x ??? cm. Necessitem tres nombres per a referir-nos a la seua dimensió. El nombre que hem afegit és l'altura de la caixa.

***Exemple:***

- Si has vist dibuixos fets pels egipcis t'haurà cridat l'atenció que estan dibuixats amb unes poses molt estranyes. Es deu al fet que representar en un pla un cos de l'espai és molt complex. Les figures perden el seu volum.

*Lleonard Da Vinci,* un geni en tots els camps i que va col·laborar en moltes activitats matemàtiques amb Lucca Paccioli (que era el seu professor) va ser un dels pioners a aconseguir representar les tres dimensions a un quadre. Aqueixes representacions utilitzen matemàtiques.

## Activitats proposades

**2.** Busca una caixa de galetes. Mesura-la i dóna el valor de les seues tres dimensions.

**3.** Dibuixa en un paper aqueixa caixa de galetes. És difícil, perquè estàs representant en un full de dimensió 2 un objecte tridimensional (la caixa).

**4.** Dibuixa un baló de futbol, una llanda de conserves i un donut a un full de paper.

## 1.3. Poliedres, cossos redons i altres figures

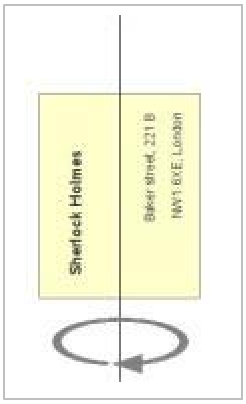
Un **poliedre** és un cos geomètric les cares del qual són polígons.

Anomenem **cossos redons** a figures prou regulars que tenen alguna superfície corba.

Un tipus particular de poliedres són els poliedres regulars, que estudiarem en una altra secció d'aquest capítol. Els prismes i piràmides també són poliedres.

Els principals cossos redons que estudiarem són les esferes, cons i cilindres. Un tipus particular de cossos redons és el dels cossos de revolució, que s'obtenen en girar una figura plana entorn d'un eix.

## Activitats resoltes




- Si agafem una targeta de visita (rectangular), la travessem per un fil seguint el seu eix de simetria i la fem girar, quina figura obtenim?

La figura que s'obté és un cilindre. Pots comprovar-ho.

- Quina forma té una rosquilla?

La rosquilla no és ni una esfera ni un cilindre ni un con. La seua forma, igual que la d'un pneumàtic és una altra figura matemàtica, molt utilitzada, denominada tor.

## Activitats proposades

**5.** Talla un triangle isòsceles de paper. Entrebanc un fil al llarg del seu eix de simetria i fes-ho girar. Quina figura s'obté?

**6.** Para cada un dels apartats següents, escriu al teu quadern 5 objectes quotidians que tinguen la forma requerida:

a) esfera b) cilindre c) poliedre regular d) prisma e) piràmide f) con

**7.** Aprèn a fer un cub amb papiroflèxia:

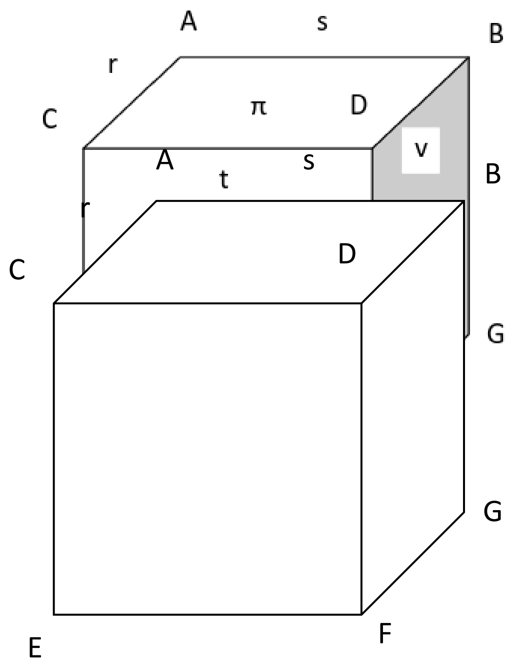
http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=13498&directory=67


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

## 1.4. Elements de l'espai

### Punts, rectes i plans

Mira al teu voltant. Estàs en una habitació. Les parets, el sòl i el sostre són plans. Aquests plans de vegades es tallen en segments de rectes. I la intersecció de tres d'aqueixos plans o de dos d'aqueixes rectes és a un punt.




### Activitats resoltes

- Al cub del marge hem donat nom als punts amb lletres majúscules: $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$…; a les rectes amb lletres minúscules: $r$, $s$, $t$, $u$…; i als plans amb lletres gregues: π, α…

  També es podrien denominar dient, recta que passa pels punts $A$ i $B$, o pla que conté als punts $A$, $B$ i $C$.

### Activitats proposades

**8.** Indica la recta que passa pels punts $D$ i $F$.

**9.** Indica el pla que passa pels punts $C$, $D$ i $E$.

**10.** Indica el pla que conté a la recta $t$ i al punt $B$.

**11.** Indica el pla que conté a les rectes $s$ i $t$.

### Posicions relatives de dos plans

A la teua habitació el pla del sostre i el del sòl són plans paral·lels. El pla del sostre i el d'una paret són plans secants. A més com formen un angle recte són plans perpendiculars.

Dos plans a l'espai són **paral·lels** si no tenen cap punt en comú, i són **secants** si tenen una recta en comú.

### Activitats resoltes

- Observem les sis cares del cub i comprovem que o són paral·leles o són secants. Les que són secants també són en aquest cas perpendiculars.
- El pla π i el pla α són secants i es tallen a la recta $t$.
- El pla π i el del sòl són paral·lels.


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

## Activitats proposades

**12.** Indica un pla paral·lel al pla de la pissarra.

**13.** Dibuixa al teu quadern un croquis de la teua aula i assenyala els plans que siguen secants al pla del sostre.

### Posicions relatives de dues rectes a l'espai

Continua mirant la teua aula. Fixa't en una recta del sostre. Les altres tres rectes del sostre o es tallen amb ella, o són paral·leles. Segueix fixant-te a la mateixa recta, i mira les quatre rectes verticals que formen les parets. Com són respecte a aqueixa recta? Observa que dos d'elles la tallen però les altres dos ni la tallen ni són paral·leles. Diem que aqueixes rectes s'encreuen

Dues rectes a l'espai o són **paral·leles** o es **tallen** o **s'encreuen**.

## Activitats resoltes

- Ens fixem en el cub anterior a la recta r. La recta s la talla (és secant) al punt A.
- La recta t la talla al punt C. Les tres rectes r, s i t estan al pla π.
- Les rectes r i v són paral·leles i també estan al pla π.
- Però les rectes r i u no es tallen en cap punt, ni són paral·leles, ni hi ha cap pla que continga a ambdues. Les rectes r i u s'encreuen.

## Activitats proposades

**14.** Dibuixa al teu quadern un cub. Anomena a tots els seus punts amb lletres majúscules, totes les seues rectes amb lletres minúscules, i tots els seus plans amb lletres gregues. Indica:

a) Tres parells de rectes que siguen paral·leles. Indica en cada cas sobre quin pla es troben

b) Tres parells de rectes que s'encreuen.

c) Tres parells de rectes que siguen secants. Indica en cada cas en quin punt es tallen, i en quin pla es troben.

### Posicions relatives de recta i pla

Una recta pot estar **continguda** en un pla o ser **paral·lela** al pla o ser **secant**.

## Activitats resoltes

- Seguim fixant-nos al cub anterior. El pla π conté a les rectes r, s, t i v. La recta u talla al pla π al punt D. La recta que passa pels punts E i F és paral·lela al pla π.

## Activitats proposades

**15.** Indica les rectes que estan contingudes al pla $\alpha$. Indica les que són paral·leles al dit pla. Indica les que són secants assenyalant el punt d'intersecció.

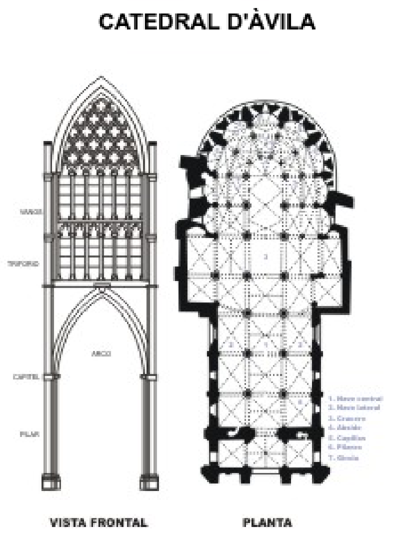

Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

## 1.5. Representació de cossos geomètrics

### De l'espai al pla

Els arquitectes, enginyers i a moltes altres professions, necessiten dibuixar en paper els edificis i les peces que dissenyen. Una forma de fer-ho és representar-los des de tres punts de vista: **planta, perfil i alçat**.

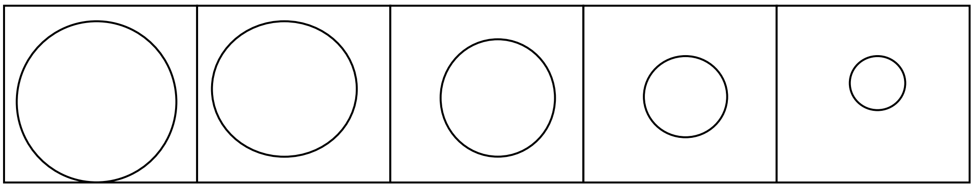
Altres professionals, com els metges, utilitzen altres tècniques, com la **tomografia**, en la que es representen els talls mitjançant diversos plans paral·lels.




Planta i perfil

### Activitats resoltes

- La següent tomografia correspon a un con amb talls paral·lels a la seua base:



### Activitats proposades

**16.** Dibuixa al teu quadern la planta, el perfil i l'alçat de:

a) un cub b) un cilindre c) un con d) una esfera e) una piràmide

**17.** Dibuixa al teu quadern una tomografia de:

a) Una esfera amb talls paral·lels al seu equador

b) Un cilindre amb talls paral·lels a la seua base

c) Un cilindre amb talls paral·lels a una aresta

d) Un cub amb talls paral·lels a una cara

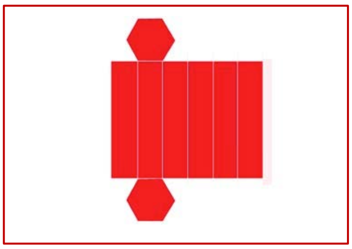
e) Un cub amb talls paral·lels a una aresta.


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

## Del pla a l'espai

Molts cossos geomètrics podem construir-los fent el seu desenrotllament en un pla. Per exemple podem construir un prisma hexagonal amb el desenrotllament del marge:

Si vols construir-lo, pensa on posaries les pestanyes per a poder apegar-lo?



## Activitats proposades

**18.** Dibuixa al teu quadern un desenrotllament per a construir un cub. Dibuixa les pestanyes per a apegar-lo.

**19.** Dibuixa al teu quadern un desenrotllament per a construir una caixa amb tapa.

**20.** Dibuixa al teu quadern el desenrotllament d'un cilindre.

## Formes de representació

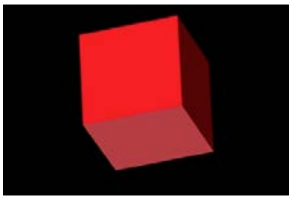
Hem vist formes de representar els cossos geomètrics: tomografies, desenrotllament, perfil, planta i alçat… però hi ha altres com descriure'l amb paraules, com per exemple: Posseeix 8 vèrtexs, 12 arestes, 6 cares totes iguals a quadrats. Saps ja què estem descrivint?

Abans vam veure la diferència entre la forma de dibuixar a l'Egipte antic i la de Lleonard da Vinci. Lleonard ja coneixia la perspectiva. Els artistes de Renaixement van aconseguir un gran domini de la perspectiva.

Una forma de perspectiva és la perspectiva cavallera, que consisteix a suposar que l'ull que mira la figura està infinitament lluny. Es té llavors, entre altres, les regles següents:

a) Les rectes paral·leles a la realitat es mantenen paral·leles al dibuix.

b) Els segments iguals sobre rectes paral·leles mantenen la mateixa longitud.



Cub en perspectiva cavallera

## Activitats proposades

**21.** Dibuixa al teu quadern una taula en perspectiva cavallera.

**22.** Descriu un tetraedre dient quants vèrtexs té, quantes arestes i quantes cares.

**23.** Dibuixa al teu quadern la planta, el perfil i l'alçat d'un cub.

**24.** Dibuixa al teu quadern una habitació en perspectiva cavallera.

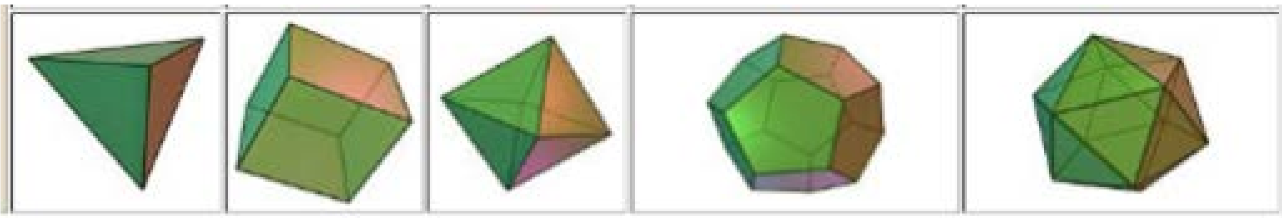
**25.** Dibuixa una tomografia d'una botella tallant per plans paral·lels a la seua base.

## 2. POLIEDRES

### 2.1. Poliedres regulars

Un **poliedre** és **regular** si totes les seues cares són polígons regulars iguals i a més en cada vèrtex concorre el mateix nombre de cares.

Només existeixen 5 poliedres regulars convexos, que són els que presentem a la taula següent:



TETRÀEDRE HEXÀEDRE OCTÀEDRE DODECÀEDRE ICOSÀEDRE

Anomenem **arestes** d'un poliedre als costats de les cares d'aquest.

Els **vèrtexs** del poliedre són els vèrtexs de les seues cares.

**Activitats resoltes**

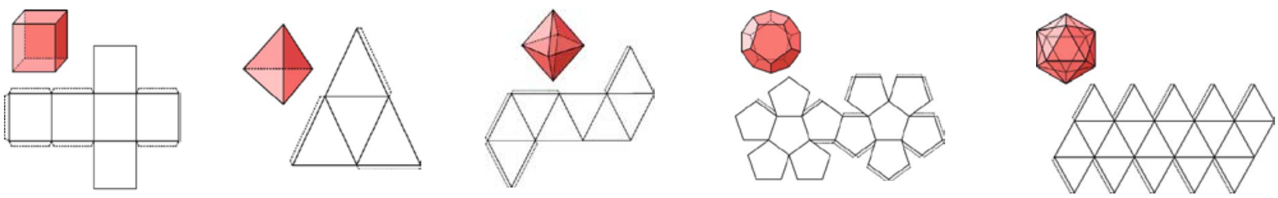
- *Conta el nombre de cares, d'arestes i de vèrtexs de cada un dels 5 poliedres regulars.*

| | CARES | VÈRTEXS | ARESTES |
|---|---|---|---|
| **TETRÀEDRE** | 4 | 4 | 6 |
| **CUB (HEXÀEDRE)** | 6 | 8 | 12 |
| **OCTÀEDRE** | 8 | 6 | 12 |
| **DODECÀEDRE** | 12 | 20 | 30 |
| **ICOSÀEDRE** | 20 | 12 | 30 |

**Activitats proposades**

**26.** Fes models en cartolina dels cinc poliedres regulars. Pots fer-lo en equip amb els teus companys.

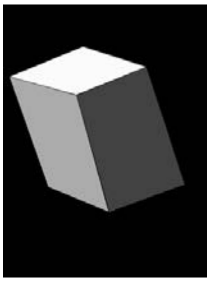
Para cada un dels cinc poliedres regulars calcula el valor de:



Nombre de cares + nombre de vèrtexs – nombre d'arestes.

Observes alguna pauta?

**27.** Hi ha poliedres amb totes els seus cares polígons regulars que no són poliedres regulars. Descriu el poliedre del marge. Per què no és un poliedre regular?



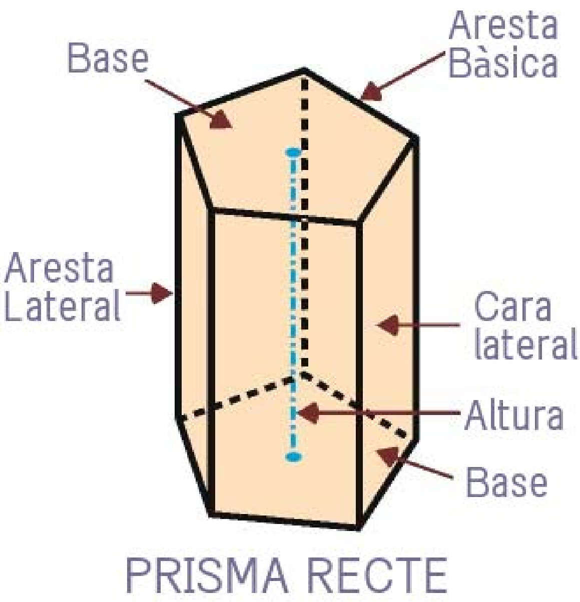
**28.** Hi ha poliedres amb totes les seues cares iguals que no són poliedres regulars. Com el poliedre format per 6 rombes que s'anomena *romboedre*. Descriu-lo. Construeix un amb el desenrotllament indicat:

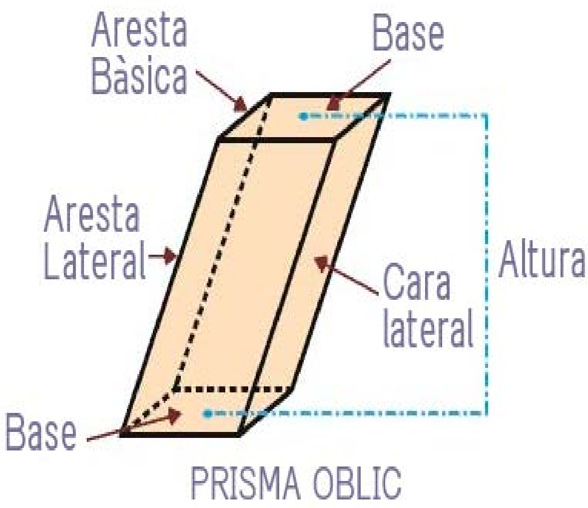
**29.** En una trama de triangles dibuixa el desenrotllament d'un poliedre que tinga 6 cares triangles equilàters i construeix el dit poliedre. Té totes les seues cares iguals i polígons regulars. Per què no és un polígon regular?

## 2.2. Prismes.

Un **prisma** és un poliedre limitat superiorment i inferiorment per dos polígons paral·lels i iguals (**bases**) i tants paral·lelograms (cares **laterals**) com a costats tenen les bases.

L'**altura** del prisma és la distància entre les seues bases.




Quan totes les cares laterals són rectangles, es diu que el prisma és un **prisma recte.**


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

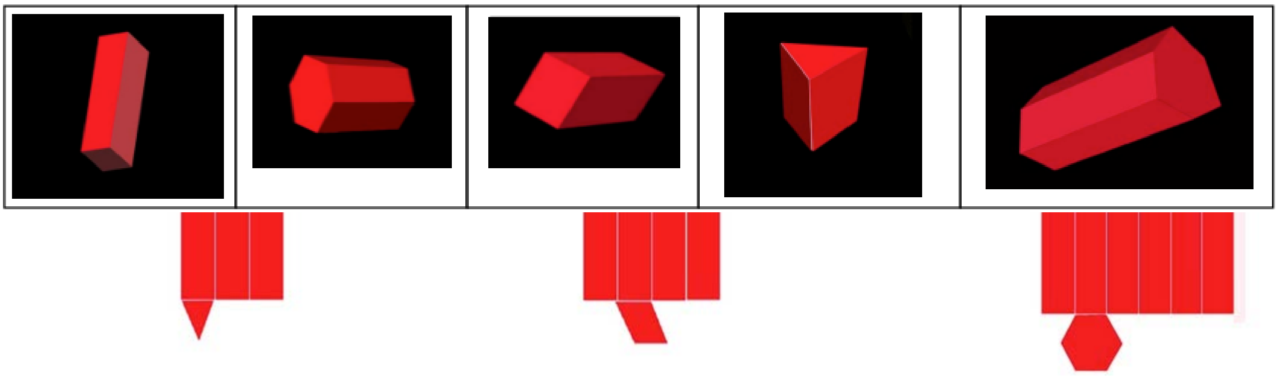
Si algunes cares laterals són romboides, tenim un **prisma oblic**.

***Exemple:***

- *Quasi tots els gratacels tenen una forma que recorda a un prisma recte.*


Encara que alguns arquitectes tenen idees més originals i s'atreveixen amb prismes oblics.

Anomenem **prisma regular** al prisma que té per bases dos polígons regulars.



Encara que no siga regular, al prisma se li anomena en funció dels polígons de la base. Així, si la base és un triangle tindrem un **prisma triangular**, si és un quadrilàter el prisma s'anomenarà **quadrangular**, si és un rombe, **prisma ròmbic** i quan la base siga un hexàgon, el prisma serà **hexagonal**.

La Calçada dels Gegants, a Irlanda del Nord, presenta roques de Basalt que han cristal·litzat en forma de prismes hexagonals. Les figures geomètriques apareixen també a la naturalesa.

Els prismes quadrangulars poden tindre molts altres noms com a paral·lelepípede, si totes les seues cares són paral·lelograms, paral·leles dos a dos; ortoedre si les seues cares són rectangles, és a dir, és un paral·lelepípede rectangular. A més dels que ja coneixes com a cub, prisma ròmbic…

## Activitats proposades

**30.** Hi ha unes xocolatines que tenen forma de prisma triangular regular recte. Quins altres prismes regulars pots construir amb unes quantes d'elles? Construeix també prismes que no siguen regulars.

**31.** Classifica els prismes de la figura en funció que siguen regulars o no, rectes o oblics i del nombre de costats de les seues bases.

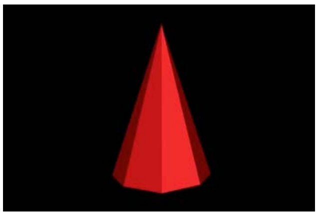
A partir del desenrotllament d'un prisma quadrangular regular recte, pensa com ha de ser el desenrotllament d'un prisma quadrangular regular oblic. Construeix-lo!

**32.** Recorda: Una diagonal és un segment que uneix dos vèrtexs no consecutius d'un poliedre. Quantes diagonals té un prisma regular triangular? I un prisma regular quadrangular?

**33.** Descriu un ortoedre, dient el nombre d'arestes i vèrtexs, i el nombre de cares, descrivint la seua forma. (De vegades se l'anomena caixa *de sabates*).

## 2.3. Piràmides

Una **piràmide** és un poliedre limitat inferiorment per un polígon i superiorment i lateralment per triangles amb un vèrtex comú.



Anomenarem **base** de la piràmide al polígon que la limita inferiorment.

**Cares laterals** als triangles que tenen un costat comú amb la base i un vèrtex comú.

A aqueix vèrtex comú se l'anomena **vèrtex** de la piràmide. **L'altura** de la piràmide és la distància del vèrtex a la base.

Quan la base de la piràmide és un polígon regular i el vèrtex es projecta sobre el centre de la base, ens trobem davant d'una **piràmide regular**.

Depenent del nombre de costats de la base de la piràmide, aquesta pot ser **triangular**, **quadrangular**, **pentagonal**...

***Exemple:***

- Hi ha unes piràmides molt famoses: les piràmides de Giza, prop del Caire, a Egipte. Són piràmides regulars amb base quadrada.

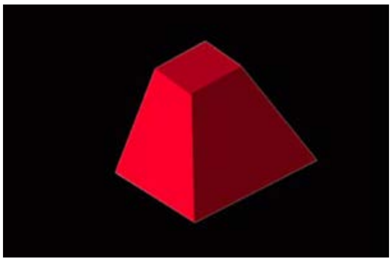
***Exemple:***

- Un tetraedre regular pot pensar-se com una piràmide triangular regular.

***Exemple:***

- Un octaedre regular es pot tallar amb un tall pla, formant dues piràmides quadrangulars regulars. Per aqueix motiu se li denomina "bipiràmide".

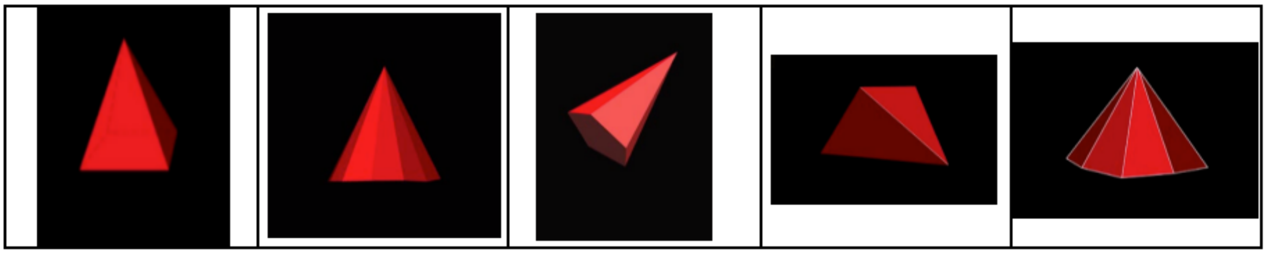
Anomenem **tronc de piràmide** al poliedre que s'obté en tallar una piràmide per un pla paral·lel a la seua base.



*Observació*: En tallar la piràmide pel pla paral·lel a la seua base en realitat queden dos cossos: una piràmide més xicoteta, proporcional a la que teníem originàriament i el tronc de piràmide.

El tronc de piràmide conserva la base de la piràmide original i, al pla del tall, apareix un nou polígon, que és semblant a la base (i que actua a manera de "tapa" del poliedre). Aquesta és l'anomenada


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay



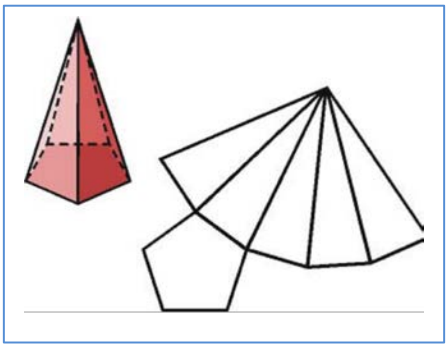
**base superior**.

## Activitats proposades

**34.** Construeix una piràmide pentagonal regular usant un desenrotllament com l'indicat.

**35.** Sabent com és el desenrotllament d'una piràmide pentagonal regular, i que un tronc de piràmide s'obté tallant aquesta per un pla, pensa i dibuixa com ha de ser el desenrotllament del tronc de piràmide pentagonal regular.

**36.** Classifica les piràmides de la figura en funció que siguen regulars o no, rectes o obliqües i del nombre de costats de la seua base.



**37.** A partir del desenrotllament d'una piràmide quadrangular regular recta, pensa i dibuixa com ha de ser el desenrotllament d'una piràmide quadrangular obliqua. Construeix-la!

## 2.4. Superfície de poliedres

La **superfície d'un poliedre** és la suma de les àrees de totes les seues cares.

Calcular la superfície d'un poliedre és simple, ja que només cal **reduir-lo a calcular les àrees dels polígons que formen les seues cares** i sumar.

***Exemples:***

- Superfície d'un cub de 3 cm d'aresta:

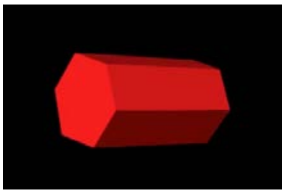
El cub té 6 cares, que són quadrats. Com l'àrea de cada un d'aqueixos quadrats és 9 $cm^2$, el del cub serà 6 · 9 = 54 $cm^2$.

- Superfície d'un icosaedre regular de 3 cm d'aresta:

L'icosaedreregular consta de 20 triangles iguals. Com l'àrea del triangle és la meitat del producte de la base (3) per l'altura ($\frac{3\sqrt{3}}{2}$), l'àrea de cada un dels triangles és

1/2·3·($\frac{3\sqrt{3}}{2}$). Així, l'àrea de l'icosaedre és $45\sqrt{3}$ $cm^2$.


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay



- Superfície d'un prisma hexagonal regular recte d'altura 10 *cm* i en el que el costat de l'hexàgon de la base és de 4 *cm*.

Hem de recordar que l'àrea d'un polígon regular és la meitat del producte del seu perímetre per la seua apotema. Així, com el costat mesura 4 *cm*, el perímetre mesura 24 *cm*. Calculem la longitud d'apotema, utilitzant el teorema de Pitàgores podem deduir que l'apotema de l'hexàgon mesura $2\sqrt{3}$

Així l'àrea d'una base és $24 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}cm^2$.

Les cares laterals són rectangles. L'àrea de cada una de les cares laterals es calcula multiplicant la base per l'altura: $4 \cdot 10 = 40$ cm$^2$.

La superfície total del prisma s'obté sumant l'àrea de les 6 cares laterals rectangulars més la de les dues bases hexagonals: $6 \cdot 40 + 2 \cdot 24\sqrt{3} = 240 + 48\sqrt{3}cm^2$.

## Activitats proposades

**38.** Troba la superfície d'un octaedre regular de 5 cm d'aresta.

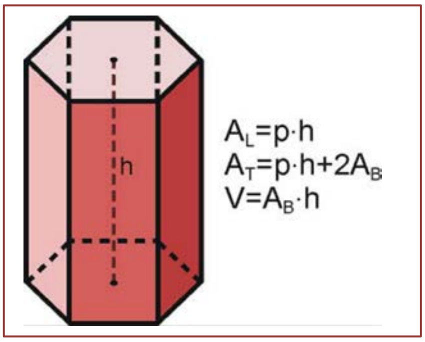
**39.** Troba l'àrea d'un prisma quadrangular oblic la base del qual és un rombe amb diagonals que mesuren 6 cm i 8 cm i la seua altura mesura 12 cm.

**40.** Quant cartó és necessari per a construir una caixa de sabates d'arestes amb longituds de 12 cm, 22 cm i 10 cm?

**41.** Si amb un litre de pintura podem pintar 20 m$^2$, quants litres de pintura són necessaris per a pintar un icosaedre regular de 38 cm d'aresta?

## 2.5. Volum de prismes i piràmides

El **volum** d'un cos geomètric representa el que ocupa en l'espai. Associat a aquest concepte està el de **capacitat** d'un cos, que és el que pot contindre. En matemàtiques moltes vegades es confonen aquests dos conceptes, atès que les "parets" del cos se suposen sense grossor.




De la mateixa manera que l'àrea d'un rectangle és el producte de les seues dues dimensions (base x altura), el volum del prisma rectangular recte (**ortoedre**) és el producte de les seues tres dimensions: llarg x ample x alt.

Si pensem un poc en què significa llarg x ample, veurem que açò és precisament l'àrea de la base, amb la qual cosa el volum de l'ortoedre també pot calcular-se multiplicant l'àrea de la seua base per la seua altura. Podem estendre aqueixa idea a qualsevol prisma:

El **volum d'un prisma** és igual al producte de l'àrea de la seua base per la seua altura.


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

## Activitats resoltes

- Calcula el volum d'un prisma recte la base del qual és un pentàgon regular de 10 $cm^2$ d'àrea i la seua altura és de 15 cm.

Com ens donen l'àrea de la base no necessitem calcular-la.

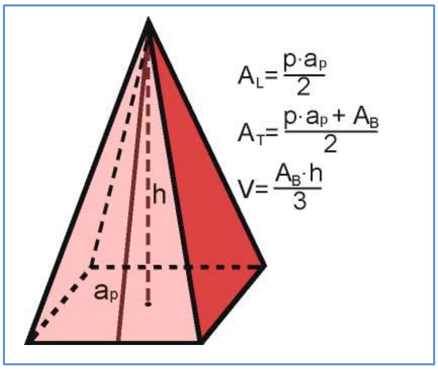
Volum = Àrea de la base x altura = $10 \cdot 15 = 150$ $cm^3$

- Troba el volum d'un prisma quadrangular oblic la base del qual és un rombe amb diagonals que mesuren 6 cm i 8 cm i la seua altura és igual a la diagonal major.

L'àrea del rombe és la meitat del producte de les seues dos diagonals. Així en aquest cas l'àrea de la base del prisma és $1/2 \cdot 6 \cdot 8 = 24$ $cm^2$.

Per a calcular el volum ens dóna igual que el prisma siga recte o no, ja que només ens interessa l'àrea de la base i l'altura, que en aquest cas és de 8 cm, igual a la diagonal major.

Volum = Àrea de la base x altura = $24 \cdot 8 = 192$ $cm^3$




El **volum d'una piràmide** és un terç del volum del prisma que té la mateixa base que la piràmide i la mateixa altura que ella.

Provar aqueixa propietat relativa al volum d'una piràmide és complicat: requereix intuïció geomètrica, encara que et pots fer una idea de per què aqueix resultat és cert utilitzant papiroflèxia per a construir un prisma a partir de tres piràmides del mateix volum (consulta la revista al final del tema).

## Activitats proposades

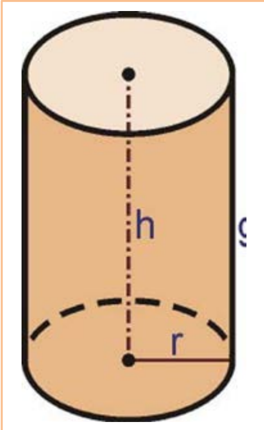
**42.** Troba el volum d'una piràmide hexagonal regular, en la que cada costat de la base mesura 3 cm i l'altura és de 12 cm.

**43.** Troba el volum d'un octaedre de 8 cm d'aresta. *Indicació*: pots descompondre l'octaedre en dues piràmides quadrades regulars.

## 3. COSSOS REDONS

### 3.1. Cilindres

De la mateixa manera que un prisma recte s'alça a partir d'una base poligonal, un **cilindre** es construeix a partir d'una base circular.



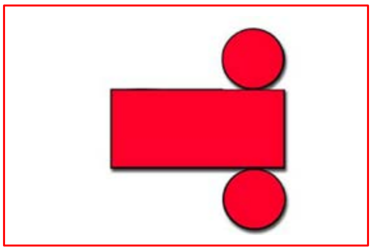

Un **cilindre** es pot generar fent girar un rectangle al voltant d'un dels seus costats. Els cercles que s'obtenen en girar l'altre costat són les **bases** del cilindre. El costat del rectangle que ens serveix com a eix de gir coincideix amb **l'altura** del cilindre.

***Exemple:***

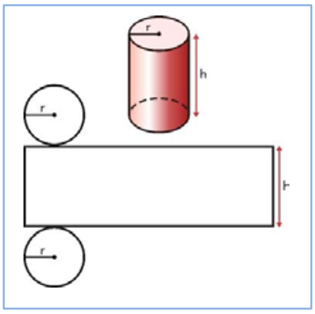
Abans ens hem referit a gratacel amb forma de prisma, però també n'hi ha amb forma de cilindre. Inclús hi ha cilindres en torres d'esglésies.

***Exemple:***

Les llandes de conserves són cilindres. Els rotllos de paper higiènic tenen forma cilíndrica (de fet, el nom cilindre prové d'una paraula grega que es referix a la seua forma enrotllada). Hi ha envasos de papes amb forma cilíndrica. Les llandes de refresc també tenen forma de cilindre. Molts objectes quotidians tenen forma de cilindre.



El **desenrotllament** d'un cilindre ens permetria retallar-lo en cartolina i armar-lo. Consta d'un rectangle, que el limitarà lateralment i de dos cercles, les bases que el limiten inferiorment i superiorment.

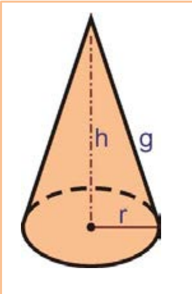


## Activitats proposades

**44.** Dibuixa el desenrotllament corresponent a un cilindre la base del qual és un cercle de 2 cm de radi i la seua altura és de 10 cm. Després, utilitzant cinta adhesiva, construeix aqueix cilindre en paper.


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

## 3.2. Cons

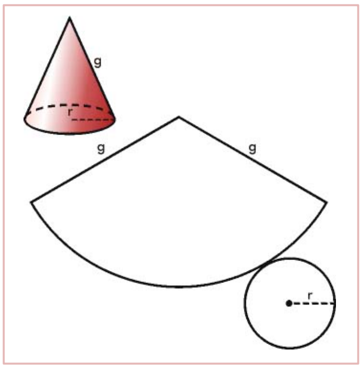



Si per a parlar del cilindre posàvem com a exemple als prismes, per a parlar del con posem com a exemple a les piràmides.

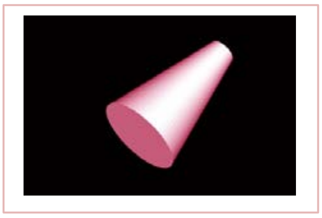
Un **con** es pot generar fent girar un triangle rectangle al voltant d'un dels seus catets. El cercle que s'obté en girar l'altre catet és la **base** del con. El costat del triangle que ens serveix com a eix de gir coincideix amb **l'altura** del con. La hipotenusa del triangle rectangle mesura el mateix que la **generatriu** del con.

***Exemple:***

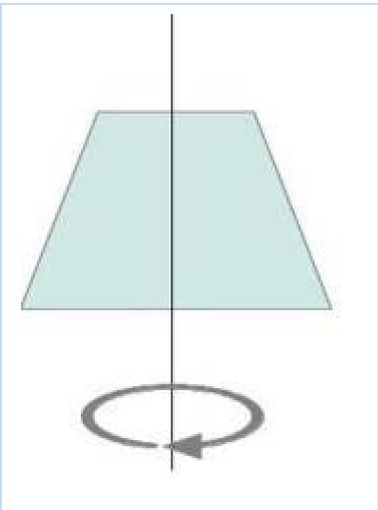
No coneixem gratacel amb forma cònica, però les botigues dels indis que estem acostumats a veure a les pel·lícules de l'oest tenen aqueixa forma.




El **desenrotllament** d'un con consta d'un sector circular i un cercle. Ens permetria retallar-ho en cartolina i armar-lo.



Igual que fèiem amb les piràmides, podem tallar un con per un pla paral·lel a la seua base, resultant un con més xicotet (la part superior del tall) i un altre cos. Aqueix un altre cos, que té dues **bases** circulars es denomina **tronc de con**. La seua **altura** és la distància entre les seues dues bases i anomenarem **generatriu** del tronc de con al segment que queda de la generatriu del con original que ha quedat després de tallar la part superior.



Un tronc de con es pot obtindre fent girar un trapezi rectangle al voltant de la seua altura.

***Exemple:***

Als circs, els domadors solen pujar a les feres en "tamborets" amb forma de tronc de con. Una flanera té forma de tronc de con. Els envasos de formatge fresc també tenen forma de con. Has pensat per què?

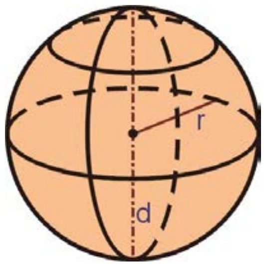
## 3.3. Esferes

Madrid: A l’altre costat del mur

És més complicat definir una esfera que posar exemples d’objectes amb forma esfèrica: un meló d’alger, una pilota, una boleta… L’esfera és la generalització natural del cercle (pla) a l’espai.

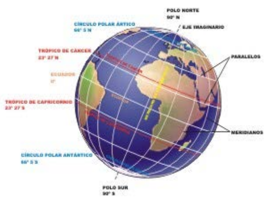
Una **esfera** es pot generar fent que un semicercle gire al voltant del seu diàmetre.

El radi del semicercle és el **radi** de l’esfera.




Quan tallem una esfera per un pla, tots els talls són cercles. Si el pla pel que tallem passa pel centre de l’esfera, obtenim un **cercle màxim**. El seu radi és igual al de l’esfera.

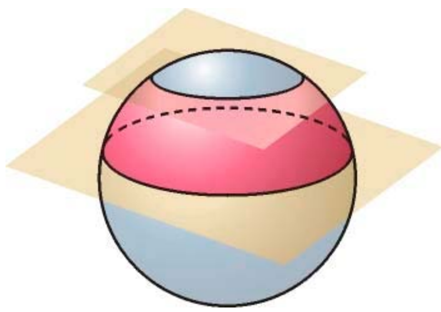
***Exemple:***



- A l’esfera terrestre, els meridians es corresponen amb cercles màxims. Els paral·lels són les circumferències que limiten els cercles que queden en tallar l’esfera terrestre amb plans perpendiculars a l’eix que passa pels pols. L’equador és l’únic paral·lel que és un cercle màxim.

## Activitats resoltes

- Una esfera de 10 *cm* de radi es talla per un pla de manera que el cercle resultant té 6 *cm* de radi. Quina és la distància del centre de l’esfera a aqueix pla?



Hem de tindre en compte que el radi de l’esfera (*R*) és la hipotenusa del triangle rectangle que té per un dels seus catets al radi del cercle resultant del tall amb el pla (*r*) i per l’altre catet a un tros del radi de l’esfera perpendicular al pla, la longitud del qual és la distància demanada (*d*).

Així, com coneixem dos de les dades, només hem d’aplicar el teorema de Pitàgores per a calcular el tercer (la distància demanada *d*).

Així $r^2 + d^2 = R^2$ i, aïllant obtenim

$d^2 = R^2 – r^2 = 100 – 36 = 64$. Per la qual cosa $d = \sqrt{64} = 8$ *cm*.


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

## 3.4. Superfície de cilindres, cons i esferes

### Superfície del cilindre

El procediment per a trobar la superfície d'un cilindre o un con ens recorda el mode amb què calculàvem la superfície d'un prisma o d'una piràmide: no tenim més que veure quines figures intervenen en el seu desenrotllament, calcular l'àrea de cada una d'elles i sumar-les.

En alguns textos s'utilitza el concepte d'àrea **lateral** tant per a prismes com per a cilindres. Amb ell es refereixen a l'àrea "de les parets" de la figura, sense tindre en compte el de la o les bases. Aquest **concepte no cal si en cada moment saps què estàs fent**. Les fórmules s'han de comprendre, però les matemàtiques no són un grapat de fórmules que s'han d'aprendre de memòria. Entendre el que s'ha de fer en cada moment et facilitarà l'aprenentatge de les matemàtiques.

El desenrotllament del cilindre consta de 2 cercles i un rectangle. L'altura del rectangle ($h$) és l'altura del cilindre i com el rectangle s'ha d'enrotllar al voltant de la base del cilindre, la seua base ha de mesurar el mateix que la corresponent circumferència i aqueix valor és, sent $r$ el radi de la base del cilindre. Així, l'àrea del rectangle és $2\pi rh$.

D'altra banda cada una de les bases té àrea $\pi r^2$. Així:

**Superfície del cilindre = $2\cdot\pi\cdot r\cdot h + \pi\cdot r^2$**

## Activitats proposades

**45.** Troba la superfície d'un cilindre l'altura del qual és de 12 cm i el radi de la seua base és de 3 cm.

**46.** Busca una llanda de tonyina en conserva (cilíndrica). Mesura la seua altura i el diàmetre de les seues bases. Dibuixa el desenrotllament del cilindre que dóna lloc a aqueixa llanda. Retalla-ho i forma una rèplica en paper de la llanda de tonyina.

### Superfície del con

Seguint la mateixa idea anterior, per a calcular la superfície d'un con, sumarem les àrees de les dues peces que componen el seu desenrotllament: un cercle i un sector circular. (Mira la figura del desenrotllament del con que està a la secció 3.2).

Si la base del con és un cercle de radi $r$, la longitud de la corresponent circumferència és $2\pi r$ i la part corba del sector circular al desenrotllament del con ha d'enrotllar-se sobre aqueixa circumferència, per tant la mesura d'aqueixa línia corba és $2\pi r$.

Per a calcular l'àrea del sector circular farem una regla de tres, tenint en compte que el radi d'aqueix sector circular és la generatriu del con: si a una longitud de $2\pi g$ (circumferència completa) li correspon una àrea de $\pi g^2$, a una longitud de $2\pi r$ li correspondrà $2\pi r \cdot \pi g^2 / 2\pi g = \pi\cdot r\cdot g$.

La base del con és un cercle de radi r, l'àrea del qual és de sobra conegut. Així tenim que

**Superfície del con = Àrea del sector circular + Àrea del cercle = $\pi\cdot r\cdot g + \pi\cdot r^2$**

Per a calcular la superfície del tronc de con hem de calcular les àrees de les seues bases, que són cercles (i, per tant, fàcils de calcular) i la de la seua paret lateral. L'àrea d'aquesta paret lateral se pot calcular restant l'àrea de la paret del con original menys el de la paret del con xicotet que hem tallat.

**Superfície lateral del tronc de con = Superfície lateral del con original – Superfície lateral del con que tallem**

Per a calcular la superfície total cal sumar a l'àrea lateral el de les dues bases.

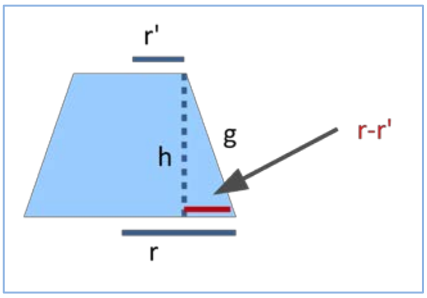
També es pot calcular açò mitjançant una fórmula, la prova de la qual utilitza dos teoremes importants de la geometria plana: el teorema de Pitàgores i el teorema de Tales.

Suposarem que el radi de la base major del tronc de con és $r$, el de la base menor $r'$ i la generatriu $g$. Llavors

**Superfície del tronc de con = $\pi\cdot(r+r')\cdot g + \pi\cdot r^2+\pi\cdot r'^2$**

## Activitats resoltes

- Volem construir un tamboret per a elefants amb forma de tronc de con, amb 75 *cm* d'altura i bases de 1,50 i 2,50 metres. Posteriorment forrarem amb tela tot el tamboret. Si el metre quadrat de la tela triada costa 3 euros (i se suposa no es desperdicia res en l'elaboració) quant costa forrar el tamboret?




La primera cosa que hem de fer és expressar totes les dades amb les mateixes unitats. Ho expressarem en metres.

Com ens donen l'altura i els radis, calcularem la generatriu usant el teorema de Pitàgores:

Així $h^2+(r-r')^2 = g^2$ i, reprenent les dades tenim:

$r' = 1{,}5\ m$; $r = 2{,}5\ m$; $g = \sqrt{0{,}75^2 + 1^2} = 1{,}25\ m$.

Amb això calculem l'àrea: $\pi\cdot(2{,}5 + 1{,}5)\cdot 1{,}25 + \pi\cdot 2{,}5^2 + \pi\cdot 1{,}5^2 = 42{,}39\ m^2$

i, per tant, forrar el tamboret ens costa 42,39 · 3 = 127,17 euros.

## Superfície de l'esfera

No podem calcular la superfície de l'esfera mitjançant el seu desenrotllament, ja que només es podria obtindre de forma aproximada. No obstant això, hi ha diferents mètodes (més avançats) que permeten calcular-lo. Encara que no som partidaris de donar fórmules, aquesta vegada hem d'avançar que

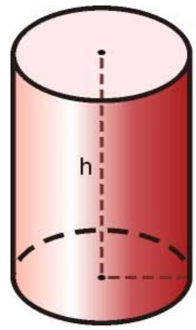
**Superfície de l'esfera de radi $r$ és igual a $4\pi r^2$**

Aqueix valor coincideix amb el de l'àrea lateral del cilindre de radi $r$ i altura $2r$ (que és el que s'ajusta per complet a l'esfera). Com sabem deduir l'àrea lateral del cilindre, recordar açò ens evitarà haver de recordar la fórmula anterior.

## 3.5. Volum de cilindres, cons i esferes

Amb el càlcul de volums ocorre una cosa pareguda al que ocorre amb les àrees: el càlcul del volum d'un cilindre és semblant al del volum d'un prisma, mentre que el càlcul del volum del con ens recorda al del volum de la piràmide. L'esfera mereix un capítol a part.

### Volum del cilindre




El volum del cilindre es calcula com el producte de l'àrea de la seua base (que és un cercle) per la seua altura. Si el radi de la base és *r* i l'altura és *h* ens queda

**Volum cilindre = $\pi r^2 h$**

***Exemple:***

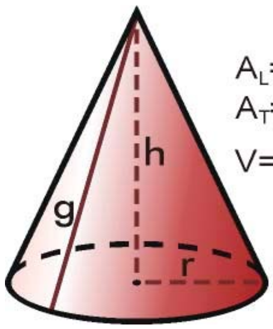
- Una llanda de tomaca fregida en conserva té un diàmetre de 6 *cm* i una altura de 12 *cm*. Calcularem el volum de la llanda, que ens indicarà quant tomaca cap al seu interior.

Cal parar atenció amb les dades perquè ens donen el diàmetre en lloc del radi. El radi de la base és 3 *cm*, la meitat del diàmetre.

Així el volum ve donat per

$$\text{Volum} = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 \approx 339,12\ cm^3$$

### Volum del con




El volum d'un con equival a un terç del volum del cilindre que té la mateixa base i la mateixa altura (et recorda això alguna cosa?). Així, per a un con el radi de la base del qual és *r* i la seua altura és *h* es té que

**Volum con = $1/3\ \pi r^2 h$**

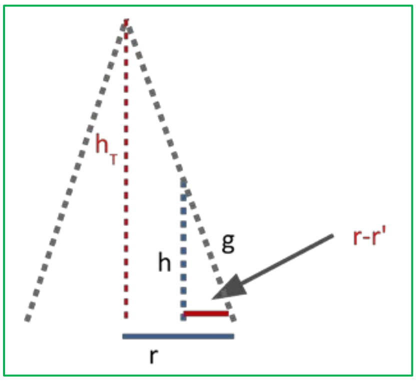
Per a calcular el volum d'un **tronc de con** calcularem el volum del con original i li restarem la part superior que hem tallat.


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

***Exemple:***

- Calcularem el volum del tamboret per a elefants que hem forrat de tela en una activitat anterior: té forma de tronc de con, amb 75 *cm* d'altura i bases de 1,50 i 2,50 metres.

La primera cosa que farem és determinar el volum del con complet. Per a això necessitem calcular la seua altura.




Utilitzant semblança de triangles i anomenant a l'altura del con total $h_T$ tenim que

$$h_T/h = r / (r - r')$$

d'ací que l'altura del con total siga

$$h_T = h \cdot r/(r - r') = 0{,}75 \cdot 2{,}5/ 1 = 1{,}875\ m.$$

i per això el volum del con total serà de $V = h_T \pi r^2 = 36{,}8\ m^3$ .

Ara hem de calcular el volum del "con xicotet" (el que hem eliminat per a aconseguir el tronc de con). La seua altura és la diferència entre l'altura del con gran i la del tronc de con. El seu radi és el de la base superior del tronc de con.

Per això el seu volum ve donat per $(h_T - h)\ \pi r'^2 = 7{,}95\ m^3$.

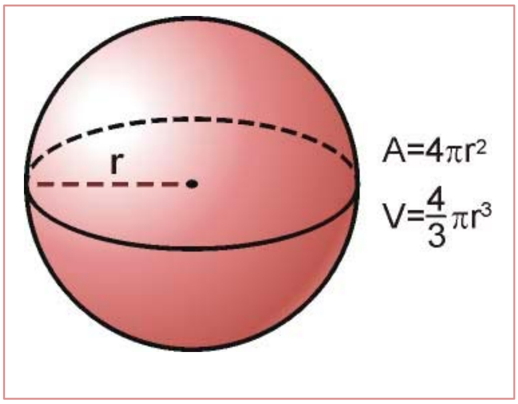
Conseqüentment, el volum del tronc de con és

$$36{,}8 - 7{,}95 = 28{,}85\ m^3.$$

## Volum de l'esfera

Al no tindre un desenrotllament pla, treballar amb l'esfera és més difícil i requereix tècniques matemàtiques que estudiaràs en altres cursos. Simplement per completar allò que s'ha exposat en aquest tema, donem la fórmula que permet calcular el volum de l'esfera en funció del seu radi *r*.

**Volum de l'esfera** $= \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$



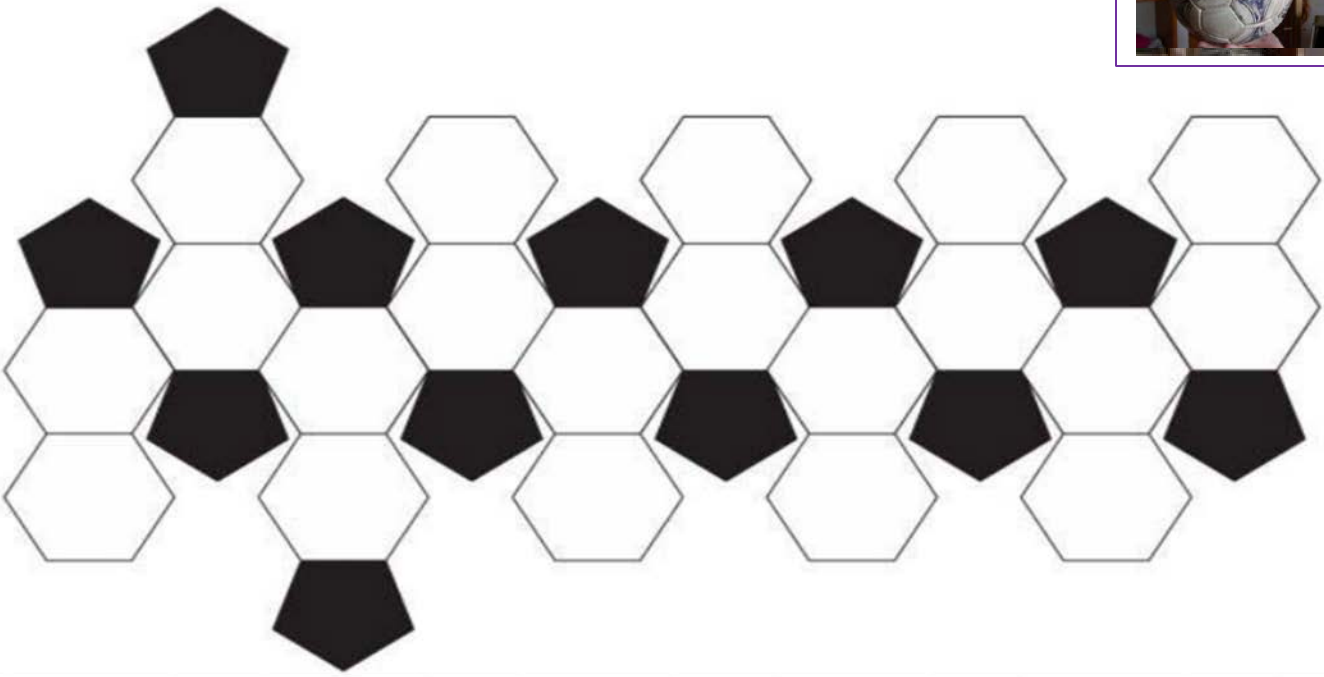
## CURIOSITATS. REVISTA

### Esferes

De tots els cossos geomètrics que tenen la mateixa superfície total, el que tanca un major volum és l'esfera. Per això les bambolles **de sabó** són esfèriques: contenen la major quantitat d'aire que es pot tancar amb aqueixa làmina de sabó. En dues dimensions és el cercle el que tanca la major superfície; per això si tires oli damunt de l'aigua es formen cercles.

### Balons de futbol

Hi ha poliedres més complicats que els que hem descrit en aquest capítol. Per exemple, si a un icosaedre li tallem els cantons obtenim un "icosaedre **truncat**". Aqueixa és la forma real dels balons **de futbol** (els clàssics que tenen pentàgons negres i hexàgons blancs). El que ocorre és que en unflar la cambra que hi ha en el seu interior es corben els polígons, donant sensació d'esfericitat. Vols comprovar-ho? Simplement retalla en cartolina aquest model i apega les unions amb cinta adhesiva.



**Llandes de conserves**

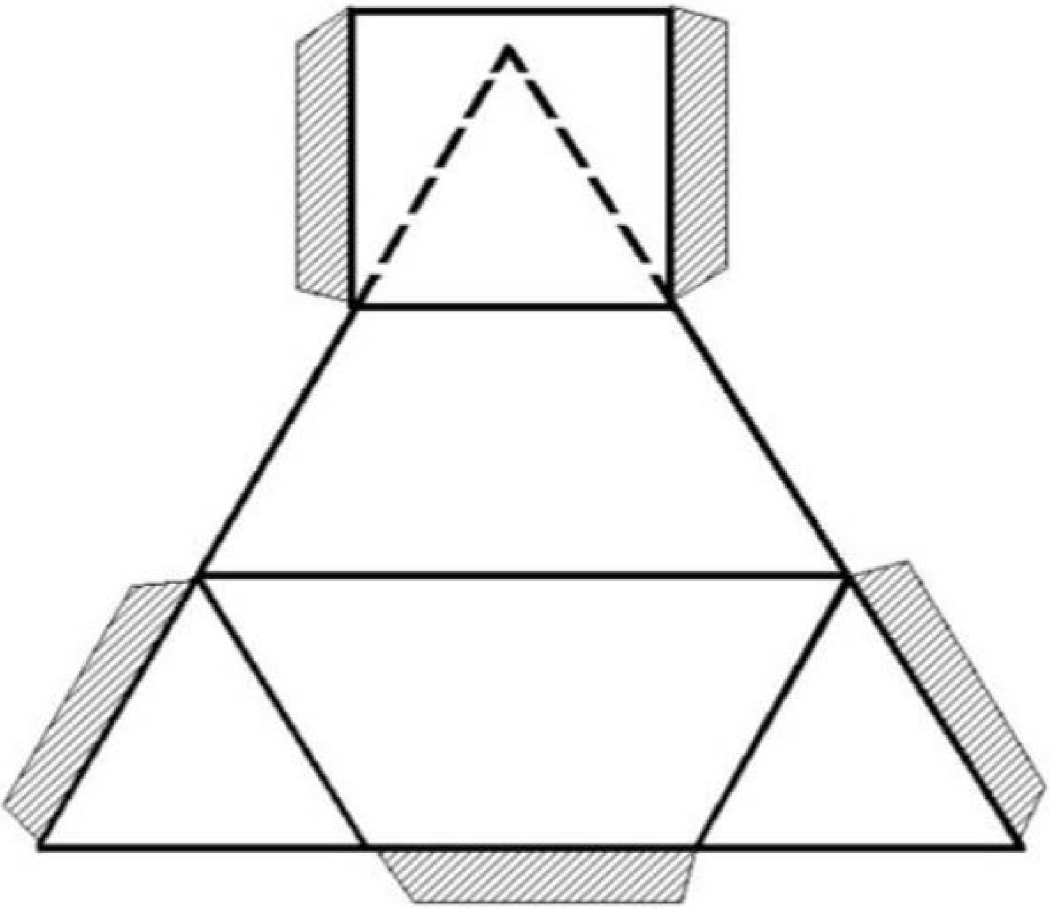
Moltes llandes i pots de conserves tenen forma cilíndrica perquè seria molt costós fabricar-les de forma esfèrica. Així i tot, pel fet que les seues bases són circulars, la relació àrea total/volum és prou satisfactòria.

## Puzles de dues peces

Et pareix que un puzle de dues peces és senzill?

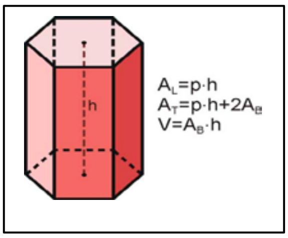
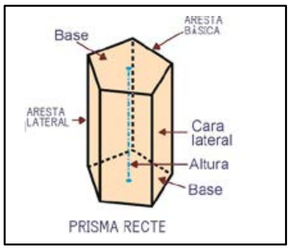
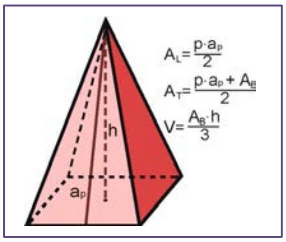
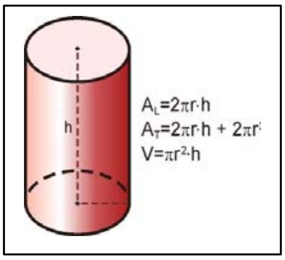
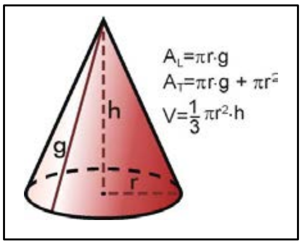
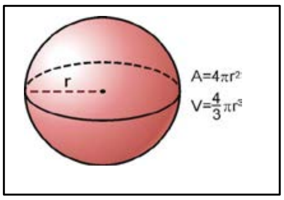
Et proposem un repte: retalla en cartolina dues còpies d'aquesta figura, per a armar amb cada una d'elles un poliedre (les cares del qual són dos triangles, dos trapezis i un quadrat).

Ara, ajuntant aqueixos dos poliedres forma un tetraedre.




Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

## RESUM

| *Concepte* | *Definició* | *Exemples* |
|---|---|---|
| **Elements de l'espai** | Punts, rectes i plans | |
| **Sistemes de representació** | Planta, perfil i alçat. Tomografia.<br>Perspectiva cavallera. | |
| **Posicions relatives** | Dos plans: o es tallen o són paral·lels.<br>Dues rectes en l'espai: o es tallen o són paral·leles o s'encreuen.<br>Una recta i un pla: o la recta està continguda al pla, o el talla o és paral·lela. | |
| **Poliedre** | Cos geomètric les cares del qual són polígons | |
| **Poliedres regulars** | Poliedre amb totes les cares polígons regulars iguals i a més en cada vèrtex concorre el mateix nombre de cares. | Tetràedre, cub, octàedre, dodecàedre, i icosàedre. |
| **Prisma. Volum** |   |   |
| **Piràmide. Volum** |   | |
| **Cilindre. Volum** |   | Un cilindre de radi 3 m i altura 5 m té un volum de 45π $m^3$, i una superfície lateral de 30π $m^2$. |
| **Con. Volum** |   | Un con de radi 3 m i altura 5 m, té un volum de 15 $m^3$. |
| **Esfera. Superfície. Volum** |   | Una esfera de radi 3 té un volum de 36π $m^3$, i una superfície de 36π $m^2$. |

## EXERCICIS I PROBLEMES

### L'espai

**1.** Dibuixa al teu quadern la planta, perfil i alçat d'una cadira.

**2.** Dibuixa al teu quadern una tomografia de:

a) Una piràmide recta hexagonal amb talls paral·lels a la seua base

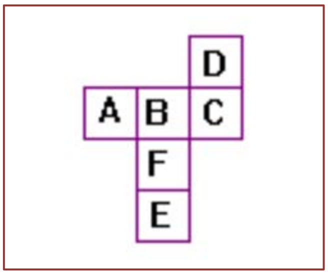
b) Un con amb talls paral·lels a la seua base

c) Un con recte amb talls paral·lels a la seua altura

d) Una prisma quadrangular amb talls paral·lels a una cara

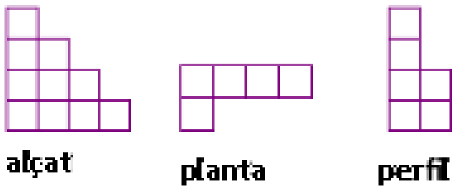
**3.** Mira al teu voltant i escriu al teu quadern el nom de cinc objectes indicant la seua descripció geomètrica.

**4.** Dibuixa una taula en perspectiva cavallera.




**5.** Si construeixes un cub amb el desenrotllament de la figura, la cara oposada a la lletra F seria….

**6.** Hem construït un cos format per cubets xicotets. Hem dibuixat el seu perfil, planta i alçat, quants cubs hem utilitzat?




**7.** Dibuixa al teu quadern un tetràedre. Anomena a tots els seus punts amb lletres majúscules, totes les seues rectes amb lletres minúscules, i tots els seus plans amb lletres gregues. Indica:

a) Tres parells de rectes que s'encreuen. Quins són? Descriu-les.

b) Tres parells de rectes que siguen assecants. Indica en cada cas en quin punt es tallen, i en quin pla es troben.

c) Hi ha rectes paral·leles?

**8.** Al dibuix del tetraedre anterior, quants plans hi ha? Hi ha plans paral·lels? Indica dos plans secants assenyalant en quina recta es tallen.


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

## Poliedres

**9.** Pot existir un poliedre regular que les seues cares siguen hexàgons? En un vèrtex, quin és el nombre mínim de polígons que ha d'haver-hi? L'angle exterior de l'hexàgon és de 120º, quant val la suma de 3 angles?

**10.** Utilitza una trama de triangles i dibuixa en ella 6 rombes d'angles 60º i 120º. Fes amb ells el desenrotllament d'un poliedre, i construeix-lo. És un romboedre.

**11.** En una trama triangular retalla 2 triangles. Pots construir amb ells un poliedre? I amb 4? Retalla 5 i intenta construir un poliedre. Ara amb 6. És un treball difícil. El major que podries construir és amb 20. Sabries donar una explicació.

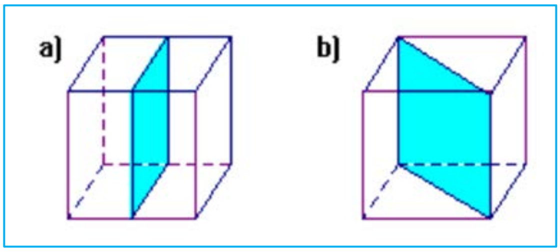
**12.** Pensa en un cub. Conta les seues cares, les seues arestes i els seus vèrtexs. Anota els resultats al teu quadern. Comprova si verifica la relació d'Euler: Vèrtexs més cares igual a arestes més 2. Fes el mateix pensant en un prisma hexagonal i en una piràmide triangular.

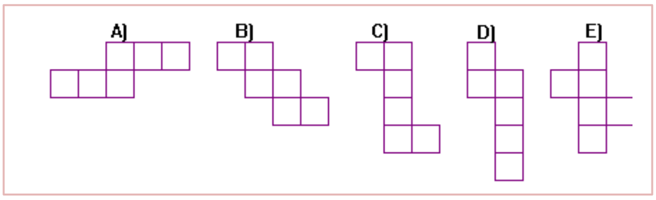
**13.** Un baló de futbol, és un poliedre? Descriu-lo.

**14.** Construeix molts, moltíssims poliedres. Almenys 5. Pots fer-ho de distintes formes: Amb el seu desenrotllament en cartolina; amb palles de refresc, fil i pegament; amb rentapipes i plastilina... Segur que se t'acuden altres formes!

**15.** Comprova que en unir els centres de les cares d'un cub s'obté un octàedre, i viceversa, si s'uneixen els centres de les cares d'un octàedre s'obté un cub. Es diu que són duals. Comprova que en unir els centres de les cares d'un icosàedre s'obté un dodecàedre, i viceversa. L'icosàedre i el dodecàedre són duals. Què s'obté si s'uneixen els centres de les cares d'un tetràedre? Quin poliedre és dual al tetràedre?

**16.** De moltes formes és possible tallar un cub en dos cossos geomètrics iguals, com per exemple mitjançant un pla que passe per dues arestes i dos diagonals de les cares, o mitjançant un pla que passe pel punt mitjà de quatre arestes, tal com s'observa a la il·lustració. Fes el desenrotllament pla de la secció del cub de la figura b), i construeix dos d'aqueixes seccions. Descriu-los. Pensa altres dos exemples de seccions del cub en dos cossos geomètrics iguals, confecciona el seu desenrotllament pla i construeix les dites seccions.




**17.** Quin dels següents desenrotllaments no pot ser el desenrotllament d'un cub? Raona la resposta. Només hi ha 11 possibilitats de desenrotllaments del cub diferents. Busca almenys tres més.

**18.** Quantes diagonals té un cub? Una diagonal és un segment que uneix dos vèrtexs que no estiguen en la mateixa cara.

**19.** Pensa en un cub. Imagina que talles un dels seus cantons creant una secció amb forma de triangle equilàter. Imagina que continues tallant mitjançant plans paral·lels, què obtens?, amb quin tall aconsegueixes el major triangle equilàter? I si continues tallant, què succeeix? Es pot obtindre un hexàgon regular? (Ajuda*: Si no eres capaç d'imaginar tant pots tallar un cub de plastilina*).


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay

**20.** Dibuixa al teu quadern tres tomografies diferents d'un cub.

**21.** De quina manera pots obtindre amb un únic tall d'un cub, dues prismes triangulars rectes.

**22.** Calcula la diagonal d'un ortoedre de costats 8, 3 i 5 cm.

**23.** Escriu 3 objectes quotidians que siguen prismes quadrangulars. Els prismes quadrangulars s'anomenen també paral·lelepípedes, i si les seues cares són rectangles s'anomenen ortoedres, dels objectes que has assenyalat, quins són paral·lelepípedes i quins són ortoedres?

**24.** Dibuixa al teu quadern un prisma triangular i un pentagonal assenyalant les cares laterals, bases,, arestes, vèrtexs i altura.

**25.** Observa, en un prisma, quantes cares concorren en un vèrtex? És sempre el mateix nombre?

**26.** Un prisma pot tindre moltes cares, però quin és el seu nombre mínim?

**27.** Dibuixa el desenrotllament d'una piràmide recta quadrangular, i d'una altra hexagonal.

**28.** Dibuixa una piràmide recta pentagonal i assenyala el seu vèrtex, les seues arestes, les seues cares laterals, la seua base i la seua altura.

**29.** Pensa en un poliedre que tinga 5 cares i 5 vèrtexs. Quin tipus de poliedre és?

**30.** Quantes diagonals té un prisma hexagonal regular? I una piràmide hexagonal regular?

**31.** Dibuixa en perspectiva una piràmide pentagonal regular. Dibuixa el seu perfil, la seua planta i el seu alçat. Dibuixa una tomografia tallant per un pla paral·lel a la base.

**32.** Construeix un piràmide regular quadrangular de costat de la base 1 cm i altura 2 cm. Deixa la base sense tancar. Construeix un prisma regular quadrangular de costat de la base 1 cm i altura 2 cm. Deixa una base sense tancar. Plena d'arena (o semblant) la piràmide i aboca-ho dins del prisma, i compte quantes vegades necessites fer-ho per a omplir el prisma.

**33.** Si en una piràmide pentagonal regular la seua apotema mesura 10 cm i el costat de la seua base 4 cm, quant mesura la seua aresta?

**34.** Quant mesura l'aresta lateral d'una piràmide pentagonal regular l'altura del qual mesura 5 m, i la base del qual està inscrita en una circumferència de 2 m de radi?

**35.** Calcula el volum d'un con de generatriu 8 cm i radi de la base 3 cm.

**36.** Calcula el volum d'un tronc de con recte si els radis de les bases mesuren 9 i 5 cm i la generatriu, 6 cm.

**37.** Calcula la superfície lateral i total d'un prisma regular hexagonal d'altura 12 cm i costat de la base 6 cm.

**38.** Calcula la superfície total d'un tronc de con de piràmide regular triangular de costats de les bases 8 i 4 cm, i aresta 6 cm.

**39.** Un cilindre recte té una superfície lateral de $67\pi$ $cm^2$. Quant mesura si superfície total si la seua altura mesura 10 cm?

## Cossos redons

**40.** Dibuixa al teu quadern els cossos que es generen en girar al voltant de:

a) un costat, un rectangle
b) un catet, un triangle rectangle
c) la hipotenusa, un triangle rectangle
d) el seu diàmetre, un cercle.

**41.** Escriu el nom de 5 objectes que tinguen forma de cilindre.

**42.** Dibuixa un cilindre oblic i assenyala les bases, la cara lateral, l'altura.

**43.** Construeix un cilindre recte en cartolina que tinga de radi de la base 1 cm i altura 2 cm.

**44.** Dibuixa en perspectiva cavallera un cilindre recte. Dibuixa el seu perfil, planta i alçat. Dibuixa 2 tomografies prenent un pla paral·lel a) a la base, b) a una aresta.

**45.** Escriu el nom de 5 objectes quotidians que tinguen forma de con.

**46.** Dibuixa en perspectiva cavallera un con oblic. Dibuixa la seua planta, perfil i alçat. Assenyala la seua base, la seua altura i la seua cara lateral.

**47.** Escriu el nom de 5 objectes quotidians que tinguen forma d'esfera.

**48.** Dibuixa una esfera en perspectiva cavallera. Dibuixa el seu perfil, planta i alçat. Dibuixa una tomografia de l'esfera.

**49.** Calcula el radi de l'esfera inscrita i circumscrita a un cub de costat 10 cm.

**50.** Calcula el radi de l'esfera inscrita i circumscrita a un tetràedre de costat 10 cm.

**51.** Calcula l'àrea total i el volum d'un cub de 10 cm de costat.

**52.** Calcula la superfície de cada un dels poliedres regulars sabent que la seua aresta mesura 8 cm. (Ajuda: L'apotema del pentàgon mesura 5,4 cm).

**53.** Si omplis d'arena un con recte de 7 cm d'altura i de radi de la base de 4 cm, i el buides en un cilindre recte de 4 cm de radi de la base, quina altura arribarà l'arena?

**54.** Calcula la superfície i el volum d'una esfera la circumferència màxima de la qual mesura $10\pi$ m.

**55.** Calcula el volum i la superfície d'una esfera inscrita i circumscrita a un cub de costat 10 m.

**56.** Calcula la superfície lateral d'un cilindre circumscrit a una esfera de radi R. Calcula la superfície de la dita esfera. Quant val si r = 6 cm.

**57.** Un con té d'altura h = 7 cm, i radi de la base r = 2 cm. Calcula el seu volum, la seua generatriu i la seua superfície lateral.

**58.** Calcula la superfície lateral i total d'un cilindre recte generat per un rectangle de costats 3 i 8 cm en girar al voltant del seu costat major.

**59.** Calcula la superfície lateral i total d'un con recte generat per un triangle rectangle de catets 3 i 8 cm en girar al voltant del seu catet menor.

**60.** Dupliquem l'aresta d'un cub, què ocorre amb la superfície d'una cara?, i amb el seu volum? Calcula'l suposant que dupliques l'aresta d'un cub de costat 5 m.

**61.** Un dipòsit cilíndric té una capacitat de 100 L i una altura de 100 cm, quant mesura el radi de la seua base?

## AUTOAVALUACIÓ

**1.** Quin dels següents cossos geomètrics NO té un desenrotllament pla?

a) el cilindre b) l'esfera c) l'icosàedre d) el dodecàedre

**2.** La definició correcta de poliedre regular és:

a) Un poliedre amb totes les seues cares polígons regulars

b) Un poliedre amb totes les seues cares polígons iguals

c) Un poliedre amb totes les seues cares polígons regulars i iguals

d) Un poliedre amb totes les seues cares polígons regulars iguals i que en cada vèrtex concorren el mateix nombre de cares.

**3.** Indica quina de les següents afirmacions és correcta

a) Un prisma oblic pot ser regular

b) El volum d'un prisma oblic és àrea de la base per l'altura

c) Les cares d'un dodecàedre són hexàgons

d) El volum d'una piràmide és àrea de la base per l'altura

**4.** Una expressió de la superfície lateral d'un cilindre és:

a) $2\pi rh$ b) $2\pi rh + \pi r^2$ c) $2\pi r(h + r)$ d) $2/3\pi rh$

**5.** El nombre de vèrtexs d'un icosàedre és:

a) 20 b) 12 c) 30 d) 10

**6.** El volum i la superfície lateral d'un prisma regular hexagonal d'altura 8 cm i costat de la base 2 cm, mesuren aproximadament:

a) 83,1 $cm^3$; 96 $cm^2$ b) 35,7 $cm^3$; 48 $cm^2$ c) 0,1 L; 0,9 ha d) 106 $m^3$; 95 $m^2$

**7.** El volum i la superfície lateral d'una piràmide regular hexagonal d'altura 2 m i costat de la base 4 m, mesuren aproximadament:

a) 62 $cm^3$; 24 $cm^2$ b) 7000 L; 0,48 ha c) 7 $cm^3$; 8 $cm^2$ d) 27,6 $m^3$; 15,87 $m^2$

**8.** El volum d'un con d'altura 9 cm i radi de la base 2 cm, mesuren:

a) $0{,}12\pi$ L b) $36\pi$ $cm^3$ c) $12\ \pi$ $cm^3$ d) $36\pi$ $cm^3$

**9.** El volum i la superfície lateral d'un cilindre d'altura 4 cm i radi de la base 5 cm, mesuren:

a) $100\pi$ $m^3$; $40\pi$ $m^2$ b) $100\pi$ $cm^3$; $40\pi$ $cm^2$ c) 31,4 $cm^3$; 12,56 $cm^2$ d) $33\pi$ $cm^3$; $7\pi$ $cm^2$

**10.** El volum i la superfície d'una esfera de radi 6 cm mesuren:

a) $288\pi$ $cm^3$; $144\pi$ $cm^2$ b) $144\pi$ $cm^3$; $288\pi$ $cm^2$ c) 452 $m^3$; 904 $m^2$ d) $96\pi$ $cm^3$; $48\pi$ $cm^2$


Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera IES Juan de Garay