

**Propiedad Intelectual**

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-012302

Fecha y hora de registro: 2013-09-26 17:30:23.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



[www.apuntesmareaverde.org.es](http://www.apuntesmareaverde.org.es)



**Autora: Nieves Zuasti i Fernando Blasco**

**Revisors: Raquel Caro i Sergio Hernández**

**Il·lustracions: Banc d'imatges de l'INTEF**

**Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay**

## Índex

### 1. L'ATZAR I LA PROBABILITAT

- 1.1. FENÒMENS ALEATORIS
- 1.2. FREQUÈNCIA ABSOLUTA I RELATIVA. FREQUÈNCIES ACUMULADES
- 1.3. EXPERIMENTS ALEATORIS
- 1.4. PROBABILITAT

### 2. GRÀFICS ESTADÍSTICS

- 2.1. DIAGRAMA DE RECTANGLES O DE BARRES
- 2.2. DIAGRAMA DE LÍNIES
- 2.3. PICTOGRAMA
- 2.4. DIAGRAMA DE SECTORS

### 3. MESURES DE CENTRALITZACIÓ I MESURES DE DISPERSIÓ

- 3.1. MITJA ARITMÈTICA
- 3.2. MODA
- 3.3. MITJANA
- 3.4. MESURES DE DISPERSIÓ

### 4. L'ORDINADOR I L'ESTADÍSTICA

#### Resum

Si vols conèixer l'estatura o el pes de les persones que tenen entre 11 i 13 anys a Espanya, pots arreplegar les dades de cada una de les persones d'aqueixes edats. Però açò és molt laboriós. El que fa l'Estadística és arreplegar una **mostra** que ens permeta representar la totalitat de la població objecte d'estudi. L'arreplega de dades és molt antiga. L'emperador August manà fer un cens, (o arreplega de dades) de tot el seu Imperi.

L'origen de la Probabilitat pot trobar-se als jocs d'atzar, i els jocs d'atzar, daus, cartes, loteria... fan un bon ús de l'Estadística i la Probabilitat.

La Ciència progressa deduint, mitjançant raonaments lògics correctes, i inferint, en que amb unes observacions experimentals, s'indueix un poc més general.

En aquest capítol repassarem els coneixements que ja tens del curs passat sobre freqüències i probabilitat i la representació de dades estadístiques i iniciarem l'estudi de les mesures de centralització: mitja, mitjana i moda.



## 1. L'ATZAR I LA PROBABILITAT

### 1.1. Fenòmens o experiments aleatoris

#### Ja saps que:

Un **fenomen o experiment aleatori** és aquell, que mantenint les mateixes condicions a l'experiència, el resultat no és sempre el mateix, no és possible predir el resultat.

- **Vegem un joc:** Dibuixa 3 caselles cap a la dreta, una casella central i 3 caselles cap a l'esquerra. Col·loca una fitxa en la casella central. Tirem dos daus i anotem la suma de les seues cares superiors. Si ix més



de 7 es mou la fitxa a la dreta, si menys, cap a l'esquerra. Tirem els daus diverses vegades. Anota quantes tirades necessites per a arribar a una de les metes.

És un **exemple** de **fenomen o experiment aleatori** perquè no es pot predir el resultat.

- No obstant això, calcular el cost de 3 kg de fruita, sabent el preu per kg, no és un experiment aleatori. És un **fenomen determinista**. També és determinista calcular el cost del rebut de l'aigua sabent el gasto.



### Activitat resolta

- Són experiments aleatoris:
  - Llançar una moneda i anotar si ix cara o creu
  - Llançar un dau
  - Si en una urna hi ha 7 boles negres i 5 roges, traiem una i anotem el color.
  - Traure una carta d'una baralla espanyola
    - No són experiments aleatoris
      - Si ixes sense paraigua quan plou segur que et mulles.
      - El preu de mig quilo de mandarines si costen a 1,7 € el quilo.
      - Soltar un objecte i veure si cau

### Activitats proposades

- Indica si és un fenomen aleatori:
  - La superfície dels països de la Comunitat Europea
  - Anotar el sexe del pròxim bebé nascut en una clínica determinada
  - L'àrea d'un cercle de què es coneix el radi
  - Tirem una xinxeta i anotem si cau amb la punta cap amunt
  - Saber si el pròxim mes és febrer.

## 1.2. Freqüència absoluta i relativa. Freqüències acumulades

### Ja saps que:

En realitzar nombroses vegades un experiment podem anotar les vegades en què s'obté cada un dels possibles resultats.

### Exemple:

- Tirem una moneda 100 vegades i anem les vegades en què ens ha eixit cara i les vegades en què ens ha eixit creu. Ens ha eixit cara 49 vegades, llavors diem que la freqüència absoluta de cara és 49.
- En dividir la freqüència absoluta pel nombre total d'experiments tenim la freqüència relativa, així la freqüència relativa de cara és  $49/100$ , o bé 0,49.

Possibles resultats	Nombre de vegades
cara	49
creu	51
Total	100

La **freqüència absoluta** d'un succés és el nombre de vegades que s'ha obtingut aqueix succés.

La **freqüència relativa** d'un succés s'obté dividint la freqüència absoluta pel nombre total d'experiments.

Si sumes les freqüències relatives de tots els possibles resultats d'un experiment, aqueixa suma sempre és igual a 1.

Al conjunt dels possibles resultats i les seues corresponents freqüències se li denomina **distribució de freqüències**.

Possibles resultats	Freqüències relatives
cara	0,49
creu	0,51
Suma total	1

### Activitats proposades

Possibles resultats	Freqüències absolutes	Freqüències relatives
1	15	
2	18	
3	16	
4	17	
5	19	
6	15	
Suma total	100	1

2. Completa en la següent taula les freqüències relatives de l'experiment aleatori tirar un dau:

De vegades pot interessar-nos saber quina és la freqüència, absoluta o relativa, del succés *ser menor a igual a n*. Llavors es diu que és una freqüència **acumulada**. Naturalment açò només té sentit si les dades són numèriques.

### Activitat resolta

- A l'exemple anterior la taula de freqüències absolutes

i freqüències absolutes acumulades és:

Observa que cada valor s'obté sumant a l'anterior. Així  $15 + 18 = 33$ , i  $33 + 16 = 49$ ...

### Activitats proposades

3. Escriu la taula de freqüències relatives i freqüències relatives acumulades de l'exercici 2. Observa que l'últim valor ara és 1.

Possibles resultats	Freqüències absolutes	Freqüències acumulades
1	15	15
2	18	33
3	16	49
4	17	66
5	19	85
6	15	100
Suma total	100	

### 1.3. Experiments aleatoris. Successos

Tots els dies apareixen a la nostra vida fets que tenen a veure amb l'atzar o amb la probabilitat. Si juguem al parxís, intuïm que *més o menys* una de cada 6 vegades eixirà un 5, amb la qual cosa podrem traure una fitxa a recórrer el tauler. Al 'Monopoly' traure un doble tres vegades seguides ens envia a la presó ("sense passar per la casella d'eixida"). Açò no ocorre moltes vegades, no obstant això, tots els que hem jugat a açò, hem anat a la presó per aqueix motiu.

En realitzar un experiment aleatori no es pot predir el resultat que es va a obtenir. No obstant això, habitualment tenim informació sobre com és de possible un determinat succés. Així doncs, l'objectiu és quantificar d'alguna manera aquesta informació que es denomina la probabilitat del succés.

La **probabilitat** és una mesura de com és de factible que tinga lloc un determinat succés.

Per a estudiar la probabilitat, hem d'introduir alguns noms. Ho anem a fer amb ajuda d'un cas concret.

#### Espai mostral

Un **experiment aleatori** és una acció (experiment) el resultat de la qual depèn de l'atzar.

En realitzar un experiment aleatori hi ha diversos possibles resultats o **successos possibles**.

- Per exemple els possibles resultats en tirar una moneda són que isca *cara* o isca *creu*.
- Els possibles resultats en tirar un dau és que ens isca 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

En realitzar l'experiment sempre s'obté un dels possibles resultats.

Al conjunt de resultats d'un experiment aleatori se li denomina **espai mostral**.

Als elements de l'espai mostral se'ls anomena **successos elementals**.

#### Exemple

- Imaginem que tenim una bossa amb 7 boles: 2 blanques, 4 roges i una negra. Fem el següent **experiment aleatori**: ficar la mà a la bossa i mirar el color de la bola que ha eixit.

Hi ha 3 *casos* possibles: "que la bola siga blanca", "que la bola siga roja" o "que la bola siga negra". Abreviadament els representarem per *blanca*, *roja* o *negra* (també podem representar els colors o escriure B, R o N; recorda que en matemàtiques sempre s'ha de simplificar, inclús la manera d'escriure).

L'**espai mostral** és el conjunt de tots els casos possibles: {B, R, N}.

Un **succés** és un subconjunt de l'espai mostral.

Els diferents **successos** són els subconjunts de l'espai mostral. Al nostre exemple els successos possibles són {B}, {R}, {N}, {B,R}, {B,N}, {R,N}, {B,R,N}.

És segur que en el nostre experiment la bola que traiem és "blanca", "negra" o "roja". Per això a l'espai mostral se l'anomena també **succés segur**.

#### Exemples.

1. Baralla espanyola de 40 cartes. Experiment: traiem una carta a l'atzar i mirem el seu pal.

Espai mostral: {ors, copes, espases, bastos}



2. Experiment: Llancem simultàniament 1 moneda d'euro i una de 2 euros a l'aire.

Espai mostral: {Cara-Cara, Cara-Creu, Creu-Cara, Creu-Creu}

3. Experiment: Llançem simultàniament 2 monedes d'1 euro (indistingibles)

Espai mostral: {1xen 2 cares, 1xen 2 creus, 1x 1 cara i una creu}

4. Experiment: Llançem una moneda d'1 euro i apuntem què ha eixit; la tornem a llançar i apuntem el resultat.



Espai mostral: {CC, CX, XC, XX}

5. Experiment: Llançem simultàniament dos daus i sumem els nombres que es veuen a les cares superiors.

Espai mostral: {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

6. Experiment: Llançem un dau usual i sumem els nombres que apareixen a la cara superior i la cara inferior (la que no es veu, que està sobre la taula).

Espai de successos: {7}

Als exemples anteriors, (2) i (4) són equivalents: els possibles resultats del llançament de 2 monedes que es distingeixen són els mateixos que els del llançament d'una mateixa moneda dues vegades (per exemple, equiparem el resultat del llançament de la moneda d'1 euro de l'exemple 3 amb el primer llançament de la moneda de l'exemple 4 i el resultat del llançament de la moneda de 2 euros amb el segon llançament).

A l'experiment 6 sempre ix el mateix resultat (per alguna raó els punts als daus usuals es distribueixen sempre de manera que les cares oposades sumen 7). Tècnicament aquest no és un experiment aleatori, ja que el resultat no depèn de l'atzar.

### Activitat resolta

- L'espai mostral de l'experiment aleatori:
  - a) Extraure una bola d'una bossa amb 5 boles roges i 2 negres és {*roja, negra*}
  - b) En traure un paper d'una bossa on s'han posat 3 papers numerats de l'1 al 3, és {1, 2, 3}
- Així, per al llançament d'un dau, encara que l'espai mostral habitual serà {1, 2, 3, 4, 5, 6}, és possible que només siga d'interès si el resultat obtingut és parell o imparell, i en este cas l'espai mostral seria {*parell, imparell*}.
- Al cas del llançament consecutiu de dues monedes, l'espai mostral pot ser {{C, C}, {C, +}, {+, C}, {+, +}}, o bé: {0 cares, 1 cara, 2 cares}, si ens interessa únicament el nombre de cares obtingudes.
  - Alguns **successos** de l'experiment aleatori tirar un dau són:
    - a) Traure un nombre imparell: {1, 3, 5}
    - b) Traure un nombre més gran que 4: {5, 6}
    - c) Traure un nombre menor que 4: {1, 2, 3}



### Activitats proposades

4. Para cada un dels exemples anteriors: llançar un dau, tirar dues monedes, indica 3 successos diferents que no siguen successos individuals.
5. En una bossa tenim 5 boles roges numerades de l'1 al 5. Es fan els dos experiments següents:



EXPERIMENT A: Es trau una bola de la bossa i es mira el seu color.

EXPERIMENT B: Es trau una bola de la bossa i es mira el seu nombre.

Quin d'aquests experiments no és un experiment aleatori? Per què?

Per a l'experiment que sí que és un experiment aleatori indica el seu espai mostral.

6. Una baralla francesa té 52 cartes, distribuïdes en 13 cartes de piques, 13 de cors, 13 de trèvols i 13 de diamants. Les piques i els trèvols són cartes negres mentre que els cors i els diamants són cartes roges. Es mescla la baralla, es talla i es fa l'experiment següent: agafar les dues cartes que han quedat dalt del tot i observar de quin color són. Descriu l'espai mostral.
7. Inventa cinc experiments aleatoris i escriu el conjunt de possibles resultats
8. Escriu l'espai mostral de l'experiment aleatori: "Escriure en cinc targetes els nombres 1, 2, 3, 4 i 5 i traure una a l'atzar"
9. Escriu l'espai mostral de l'experiment aleatori: "Tirar un clarió al sòl i anotar el nombre de trossos en què es trenca"
10. Inventa dos successos de l'experiment aleatori de traure dues cartes.
11. Al joc de loteria, indica dos successos respecte a la xifra de les centenes del primer premi.
12. Al joc de dòmino, indica tres successos amb fitxes dobles.
13. Escriu tres successos aleatoris de tirar tres monedes.

## 1.4. Probabilitat

Donats tots els successos possibles d'un experiment aleatori, assignarem a cada succés A, una quantitat que denotarem per  $P(A)$  i que anomenarem la probabilitat del succés A.

Ja saps que la probabilitat és una mesura que ens indica el grau de confiança que ocorregui un determinat succés.

La **probabilitat** s'expressa mitjançant un nombre comprés entre 0 i 1.

Si aqueix nombre està pròxim a 0 direm que és un succés improbable (ull, improbable no vol dir que siga impossible), mentre que si està pròxim a 1 direm que aqueix succés és molt més probable.

La probabilitat és una mesura de la certesa que tenim que es verifiqui un succés. Serveix per a preveure el futur usant el que se sap sobre situacions passades o presents.

Però la paraula "probable" és d'ús comú, per la qual cosa sempre saps si alguna cosa és "*molt probable*", "*prou probable*", "*poc probable*" o "*molt improbable*".

### Activitat resolta

- Si no has estudiat res un examen és *prou probable* que et suspenguin, i si t'ho saps, és *molt probable* que tragues bona nota.
- Si una persona roba un banc és *probable* que acabi a la presó.
- És *poc probable* que caigui l'avió que acaba d'eixir de Barajas
- És *segur* que després del dilluns arriba el dimarts.
- És *molt improbable* que demà hi haja un sisme submarí.

## Activitats proposades

14. Assenyalala si són poc *probable* o molt *probable* els successos següents:

- El dijous vas al col·legi.
- Creues el carrer i t'agarra un cotxe.
- Fa una quiniela i li toca el premi màxim.
- Li toca la loteria a Joan.
- Li posen una multa a una persona que condueix havent begut alcohol.
- Ixes al carrer i et cau una cornisa damunt.
- Eixirà el sol demà?
- Demà hi haja un terratrèmol a Madrid.

Per a calcular probabilitats s'usen dues tècniques, una **experimental**, analitzant les freqüències relatives de què ocorrega el succés, i l'altra per **simetria**.

### Exemple

- En una bossa que conté 20 boles blanques introduïm una bola negra (indistingible al tacte). Mesclém bé les boles de la bossa, i realitzem l'experiment consistent a ficar la mà a la bossa i traure una bola.

Sense que hàgem estudiat gens formalment sobre probabilitat. Què penses que és més probable, que la bola tretta siga blanca o que siga negra? Estem d'acord en què és més probable traure una bola blanca!

Ara ja sí que podem plantejar-nos una pregunta: En quina mesura és més probable traure una bola blanca?

No és difícil de calcular. Les dades que tenim són els següents:

- La bossa té 21 boles
- 1 bola és negra
- 20 boles són blanques

La probabilitat de traure la bola negra és 1 d'entre 21. La probabilitat de traure una bola blanca és de 20 entre 21.

El que acabem d'utilitzar és conegut com a **Llei de Laplace**. Si tots els casos possibles d'un espai mostral són **equiprobables** (açò és, tenen la mateixa probabilitat d'ocórrer), i  $S$  és un succés d'aqueix experiment aleatori es té que

### Regla de Laplace:

La probabilitat d'un succés és igual al nombre de casos favorables dividit pel nombre de casos possibles

$$P(S) = \frac{\text{nombre de casos favorables al succés } S}{\text{nombre de casos possibles}}$$

Però, i si no podem assegurar que tots els casos siguen equiprobables?

La probabilitat que ocorrega un cert resultat en realitzar l'experiment, encara que ja es veurà en altres



cursos en detall, es calcula com la freqüència relativa d'aqueix resultat repetint l'experiment moltes vegades. Com més vegades repetisques l'experiment, més s'aproximarà la freqüència relativa al valor de la probabilitat.

- Per exemple, si tires una moneda a l'aire una sola vegada i ix cara, pareixerà que la probabilitat de traure cara és 1, però si repeteixes més vegades l'experiment, la freqüència relativa de traure cara s'anirà acostant a 0,5 amb el temps. Això ens diu que la probabilitat de traure cara és 0,5.

### Activitat resolta

- Mesclém una baralla espanyola de 40 cartes (els pals són ors, copes, espases i bastos i en cada pal hi ha cartes numerades de l'1 al 7 a més d'una sota, un cavall i un rei).

Es realitza l'experiment consistent a *tallar la baralla i quedar-nos amb la carta superior*.

Considerarem els successos següents:

- 1) Obtindre una figura
- 2) Obtindre una carta amb un nombre imparell
- 3) Obtindre una carta d'espases
- 4) Obtindre una carta d'espases o una figura
- 5) Obtindre la sota d'ors

En principi les cartes no estaran marcades, amb la qual cosa la probabilitat que isca cada una d'elles és la mateixa. Açò és, estem davant d'un experiment aleatori amb tots els casos equiprobables.

- 2) A la baralla hi ha 12 figures (3 per cada pal). Així

Casos favorables: 12

Casos possibles: 40

Probabilitat:  $12/40 = 3/10$

- 4) Per cada pal hi ha 4 cartes amb nombres imparells: 1, 3, 5 i 7.

Casos favorables: 16

Casos possibles: 40

Probabilitat:  $16/40 = 2/5$

- Hi ha 10 cartes d'espases a la baralla

Casos favorables: 10

Casos possibles: 40

Probabilitat:  $10/40 = 1/4$

- Hi ha 10 cartes d'espases i a més altres 9 figures que no són d'espases (clar, les 3 figures d'espases ja les hem comptat).

Casos favorables: 19

Casos possibles: 40

Probabilitat:  $19/40$

- Només hi ha una sota d'ors

Casos favorables: 1

Casos possibles: 40

Probabilitat:  $1/40$

### Més activitats resoltes

- La probabilitat que isca cara en tirar una moneda és  $1/2$ , perquè només hi ha dos casos possibles  $\{cara, creu\}$  i suposem que la moneda no està trucada
- La probabilitat de traure un 5 en tirar un dau és  $1/6$ , perquè hi ha sis casos possibles  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  i suposem que el dau no està trucat després tots ells són equiprobables.
- La probabilitat que en creuar el carrer t'agarre un cotxe NO és  $1/2$ , perquè ja t'hauria agarrat un muntó de vegades. Per a calcular aqueixa probabilitat s'arreglen dades de vianants atropellats.
- La probabilitat de traure bola roja d'una bossa amb 7 boles roges i 3 boles blanques és  $7/10$ .
- La probabilitat que un bebé siga xiqueta és aproximadament 0,5, però en fer l'estudi amb les freqüències relatives s'ha vist que és 0,49.

Observa que per a poder utilitzar la Regla de Laplace has d'haver-te cerciorat que els successos elementals són equiprobables.

Si creues un carrer poden ocórrer dues coses, que t'agarre un cotxe o que no t'agarre, no obstant això és evident que la meitat de les vegades que creues carrers no t'agarra un cotxe.

En aquest cas l'útil és utilitzar les freqüències relatives per a estimar probabilitats quan aquestes no són conegudes.

La **lleï dels grans nombres** ens diu que quan es repeteix moltes vegades un experiment aleatori la freqüència relativa de cada succés  $S$  s'aproxima a la seua probabilitat. Com més gran siga el nombre de repeticions, millor va sent l'aproximació.

En jocs de daus, monedes, cartes... suposem que no estan trucades i que per això els successos elementals són equiprobables.

- Traiem una carta d'una baralla espanyola. La probabilitat que siga un or és  $10/40 = 1/4$ , i la probabilitat de traure un rei és  $4/40 = 1/10$ .
- Tirem dues monedes i volem calcular la probabilitat que siga cara. Podem considerar que l'espai de successos elementals és:  $\{0 \text{ cares}, 1 \text{ cara}, 2 \text{ cares}\}$ , o bé  $\{(C,C), (C,+), (+,C), (+, +)\}$ . Per a decidir haurem de saber en quin dels casos són equiprobables. Jugant, jugant, és a dir, li experiència no diu que són equiprobables al segon cas i per tant la probabilitat que alguna siga cara és  $3/4$ , en compte de  $2/3$  com seria al primer cas.

### Activitats proposades

15. Calcula la probabilitat que en tirar amb aquesta ruleta isca el plàtan.
16. Calcula la probabilitat que en traure una carta de la baralla siga: a) l'as de copes, b) una copa, c) un as, d) l'as de copes o bé un or, e) un as o bé una copa.



17. Per a saber la probabilitat que un incendi haja sigut intencionat, et basaries a l'estudi de les freqüències relatives o l'assignaries per simetria?

### Activitats resoltes

- Una bossa de boles conté 26 negres i 26 roges. Es mescla el contingut de la bossa, es fica la mà i es trau una bola, es mira el color i es torna a la bossa. A continuació es trau una altra bola i es mira el color. Quina és la probabilitat que hagen eixit una bola roja i una bola negra?

Abans de continuar llegint, pensa-ho. Si t'equivoques no passa res: el sentit de probabilitat no el tenim massa desenvolupat, però aquest és el moment de fer-ho.

Aquest problema l'hem plantejat moltes vegades a altres estudiants. Alguns diuen que la probabilitat és  $1/3$  perquè hi ha 3 casos possibles: Roja-Roja, Negra-Negra i Roja-Negra. Aqueixa resposta no és correcta.

En realitat el succés *traure una bola de cada color* consta de 2 casos Roja-Negra i Negra-Roja. Depenent de com haguérem escrit l'espai mostral o de com haguérem plantejat el problema aqueix detall es podria veure amb major o menor claredat.

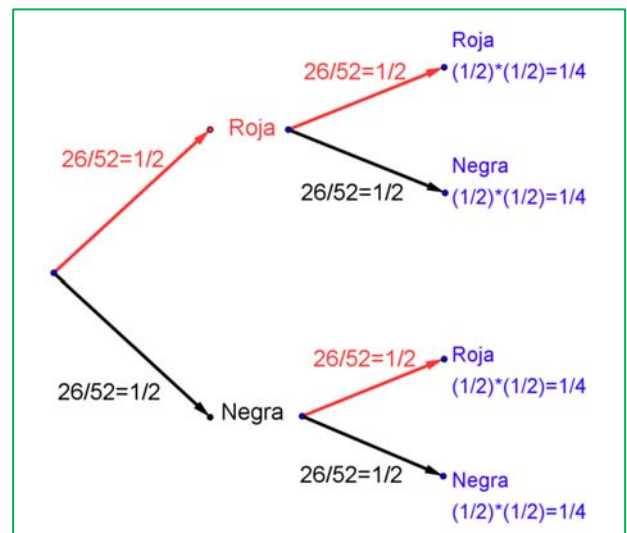
Així, la probabilitat de traure una bola de cada color és, en realitat  $1/2$ .

Si no t'ho creus pots fer un experiment: serà difícil que tingues 26 boles negres i 26 boles roges, però sí que és fàcil que tingues una baralla francesa. Mescla-la, talla i mira el color de la carta que ha quedat dalt en el muntó. Apunta-ho. Torna a deixar les cartes a la maça, torna a mesclar, talla de nou i mira el color de la carta que ha quedat dalt ara. Apunta els colors. Repeteix aquest experiment moltes vegades: 20, 50 o 100.

Si tens en compte els resultats veuràs que, aproximadament, la meitat de les vegades les dues cartes són del mateix color i l'altra meitat les cartes són de colors diferents. Amb això, hem pogut "comprovar" que la probabilitat d'aqueix succés era  $1/2$ .

Una altra forma que et pot ajudar a raonar sobre aquest problema, i molts altres de probabilitat, és confeccionar un **diagrama en arbre**. La primera bola que traiem té una probabilitat de ser Roja igual a  $26/52 = 1/2$ . Aqueix nombre l'escrivim a la branca de l'arbre. Si tornem a la bossa la bola i tornem a traure una altra bola de la bossa, la probabilitat que siga Roja torna a ser  $26/52 = 1/2$ . Completem amb idèntic raonament la resta de les branques.

La probabilitat que les dues boles que hàgem tret siguin roges és el producte de les seues branques:  $(1/2) \cdot (1/2) = 1/4$ . La mateixa probabilitat obtenim per als successos Negra-Negra, Negra-Roja i Roja-Negra. La probabilitat de Roja-Negra és per tant  $1/4$ , igual a la de Negra-Roja. Com són successos elementals la probabilitat que les dues boles siguin de distint color és la suma:  $1/4 + 1/4 = 1/2$ .



## Activitats proposades

**18.** La probabilitat no és un concepte intuïtiu. Per a això farem una prova. Considerarem l'experiment aleatori *llançar una moneda*. Copia la taula al teu quadern


- Escribeu a la 1ª fila d'aquesta taula el que tu creus que eixiria en repetir l'experiment 30 vegades. Pensa-ho i ompli la taula. Com tu vulgues (inventat-ho, però "amb sentit").
- A la 2ª fila de la taula escriu el resultat real de 30 llançaments de la moneda.

Què observes en ambdós casos? Alguna pauta? Presta atenció a aquestes qüestions per a cada una de les files de la taula.

Hi ha més o menys 15 cares i 15 creus?

Apareixen grups seguits de cares o de creus?

Quin és el nombre més gran de cares que han eixit seguides? I el de creus?

Normalment quan "t'inventes" els resultats sí que sols posar la meitat de cares i la meitat de creus. En un experiment aleatori aquests nombres estan prop de la meitat però no solen ser la meitat exacta.

Quan t'ho inventes, en general poses pocs grups seguits de cares o creus.

El cervell ens enganya i en temes probabilístics hem d'educar-lo molt més. Per això aquest tema és molt important, encara que siga el que moltes vegades es queda sense donar. Ens ajuda a què, com a ciutadans, no ens enganyen. Ni amb loteries, ni amb cartes, ni amb estadístiques electorals.

## 2. GRÀFICS ESTADÍSTICS

Si fem una representació gràfica de les dades podrem comprendre el seu significat amb molta més facilitat que si, simplement les deixem en forma de taula. Per a això, naturalment, ja hauréem d'haver arreglat les dades i elaborat una taula.

Estudiarem quatre tipus de representacions, el diagrama de rectangles, el diagrama de línies, el pictograma i el diagrama de sectors, encara que hi ha algunes altres representacions possibles.

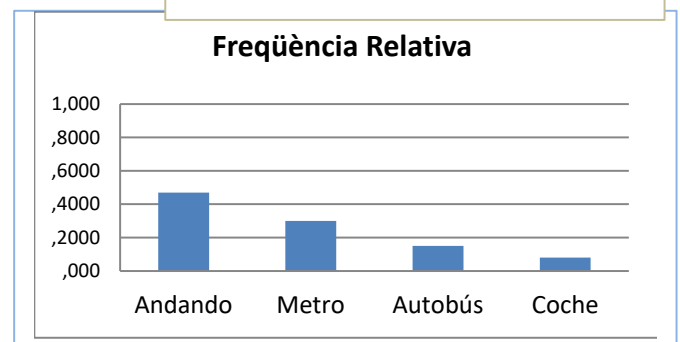
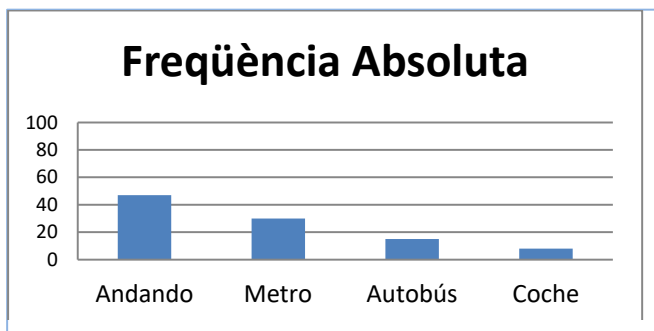
### 2.1. Diagrama de rectangles o de barres

En un diagrama de rectangles o de barres s'indiquen en l'eix horitzontal tots els possibles resultats de l'experiment i en l'eix vertical la freqüència amb què les dites dades apareixen, per tant podrà ser un diagrama de rectangles de freqüències absolutes, o relatives o acumulades segons la freqüència utilitzada.

#### Activitat resolta

- Preguntem a 100 estudiants quin és el mitjà de transport que utilitzen per a anar a escola. Les respostes apareixen a la taula del marge. Dibuixem el diagrama de rectangles.

Mitjà de transport	Freqüència Absoluta	Freqüència relativa
Caminant	47	0,47
Metro	30	0,3
Autobús	15	0,15
Cotxe	8	0,08



a) Si volem dibuixar el diagrama de barres de freqüències relatives, utilitzem la columna de freqüències relatives per a fer-ho, i s'obté el diagrama denominat "*Freqüència Relativa*". Si comparem el diagrama de barres de freqüències absolutes amb el de relatives s'observa que són iguals excepte en les unitats de l'eix d'ordenades, que ara, al de Freqüències Relatives, sempre arriben fins a 1.

b) Tenim la taula de freqüències acumulades de l'experiment tirar un dau. Dibuixem el diagrama de barres de freqüències acumulades. S'observa com les barres van creixent i l'altura de l'última coincideix amb la suma total, en aquest cas, 100, el total de vegades que hem tirat el dau.

Possibles resultats	Freqüències absolutes	Freqüències acumulades
1	15	15
2	18	33
3	16	49
4	17	66
5	19	85
6	15	100
Suma total	100	

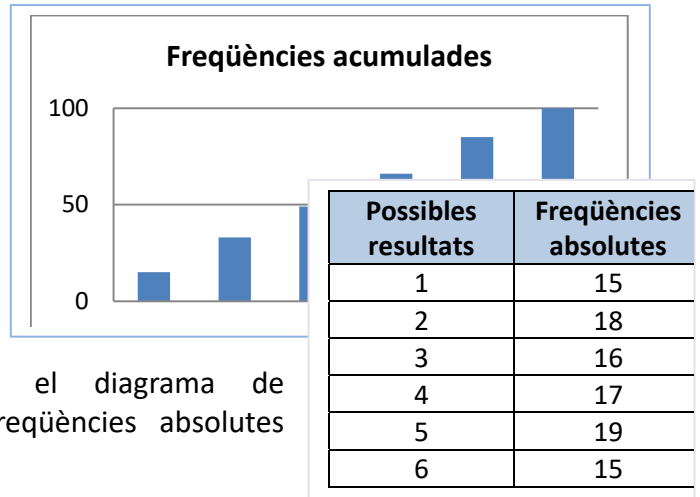
creixent i l'altura de l'última coincideix amb la suma total, en aquest cas, 100, el total de vegades que hem tirat el dau.

### Activitats proposades

Possibles resultats	Nombre de vegades
cara	56
creu	44

19. Dibuixa el diagrama de rectangles de freqüències absolutes de la taula adjunta.

Representa també el diagrama de rectangles de freqüències relatives i de freqüències absolutes acumulades.



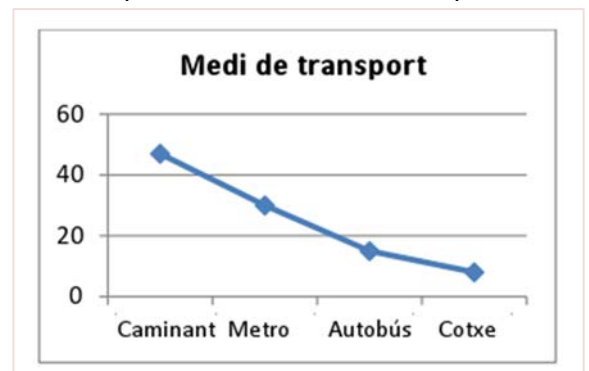
20. Dibuixa el diagrama de rectangles de freqüències absolutes de la taula adjunta. Representa també el diagrama de rectangles de freqüències relatives i de freqüències relatives acumulades.

## 2.2. Diagrama de línies

Igual que al diagrama de rectangles s'indica a l'eix horitzontal tots els possibles resultats de l'experiment i a l'eix vertical les freqüències. En compte de dibuixar barres, ara simplement s'uneixen els punts obtinguts amb línies.

### Activitat resolta

- El diagrama de línies absolutes de l'activitat resolta anterior és el del marge:



### Activitats proposades

21. Dibuixa els diagrames de línies de freqüències absolutes, relatives i absolutes acumulades de l'experiment tirar un dau de l'activitat 20.
22. Dibuixa els diagrames de línies absolutes, relatives i relatives acumulades de l'experiment tirar una moneda de l'activitat 19.



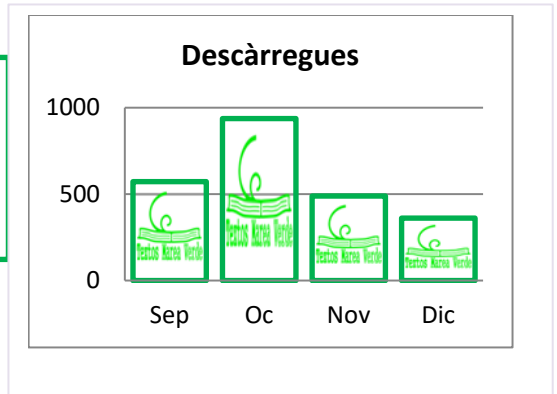
## 2.3. Pictograma

Als pictogrames es representen les freqüències mitjançant una gràfica de barres omplides de dibuixos al·lusius.

### Activitat resolta

- S'han obtingut dades sobre el nombre de descàrregues que s'han fet dels Textos Marea Verda i es tenen les dades indicats a la taula. Es representen amb un pictograma, substituint el rectangle per un dibuix al·lusiu.

Marea verda	Descàrregues
Setembre	572
Octubre	937
Novembre	489
Desembre	361



## 2.4. Diagrama de sectors

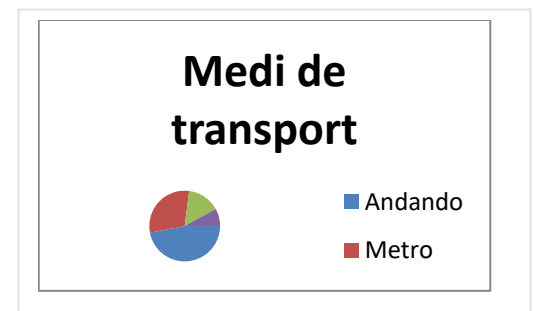
Als diagrames de sectors les freqüències es representen en un cercle que es divideix en sectors d'amplituds proporcionals a les freqüències.

### Activitat resolta

- El diagrama de sectors de la taula sobre el mitjà de transport utilitzat és:

Pots observa que amb una simple mirada saps que més o menys la mitat dels estudiants van caminant i un poc més de la quarta part van amb metro.

Però realitzar-lo a mà requereix un treball previ ja que has de calcular els angles mitjançant una regla de tres: multipliques pels  $360^\circ$  que mesura un angle complet i divideixes pel nombre total que en aquest cas és 100.



Medi de transport	Freqüència	Angle
Caminant	47	$47 \cdot 360^\circ / 100 = 47 \cdot 3,6 = 169,2$
Metro	30	$30 \cdot 360^\circ / 100 = 108$
Autobús	15	$15 \cdot 360^\circ / 100 = 54$
Cotxe	8	$8 \cdot 360^\circ / 100 = 28,8$
TOTAL	100	$360^\circ$



### Activitats proposades

23. Fes un diagrama de sectors i un pictograma relatiu al nombre de descàrregues de Textos Marea Verda a l'exemple vist en *Pictograma*.
24. Dibuixa un diagrama de sectors i un pictograma relatiu a les dades de l'activitat 19.
25. Dibuixa un diagrama de sectors i un pictograma relatiu a les dades de l'activitat 20.
26. Fes una enquesta entre els teus companys i companyes de classe sobre el nombre de llibres que lligen al mes. Confecciona una taula i representa les dades en un diagrama de rectangles, un diagrama de línies, un pictograma i un diagrama de sectors.
27. Fes una enquesta entre els teus companys i companyes de classe sobre el nombre d'hores diàries que veuen la televisió. Confecciona una taula i representa les dades en un diagrama de rectangles, un diagrama de línies, un pictograma i un diagrama de sectors.
28. Fes una enquesta entre els teus companys i companyes de classe, pregunta almenys a 10 persones, sobre el temps que tarden a anar des de sa casa al centre escolar. Confecciona una taula i representa les dades en un diagrama de rectangles, un diagrama de línies, un pictograma i un diagrama de sectors.



### 3. MESURES DE CENTRALITZACIÓ I MESURES DE DISPERSIÓ

Podrem obtindre uns nombres d'una taula de freqüències o d'unes dades que ens donen informació sobre el seu "centre" i informació sobre el que s'allunyen del dit centre.

#### 3.1. Mitja aritmètica

##### Activitat resolta

- a) Saps molt bé calcular la mitja de les teues notes. Joan ha tingut en Matemàtiques, 7, 3, 5, 9, 8. La teua nota mitjana la calcules sumant totes les notes:  $7 + 3 + 5 + 9 + 8 = 33$ , i dividint la suma entre el nombre total de notes:  $33/5 = 6,6$ .

En general si es vol calcular la mitja de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , es fa el mateix, se sumen tots i es divideix pel nombre total de dades.

$$\text{Mitja} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$$

##### Activitats proposades

29. Donades les temperatura en una ciutat a una hora determinada el dia 1 de cada mes es té la taula següent:

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny	Juliol	Agost	Setembre	Octubre	Novembre	Desembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la temperatura mitja.

##### Activitat resolta

Però si tens moltes dades i les tens agrupades en una taula de freqüències, pots fer-ho millor d'una altra manera.

- Imagina que tens les següents notes, a les que anomenes  $x_i$ , amb les freqüències absolutes, a les que anomenes  $f_i$ :

													Suma total
$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
$f_i$	1	2	1	2	3	8	7	6	6	4	3		43

Açò significa que hi ha dos 1, hi ha dos 3, i que hi ha 8 persones que han tret un 5. No sumarem  $1 + 1$  dues vegades, o  $5 + 5 + 5 \dots$  huit vegades, sinó multiplicarem  $1 \cdot 2, 3 \cdot 2, 5 \cdot 8 \dots$

Afegim una fila a la taula amb aqueixos productes:

$x_i \cdot f_i$	0	2	2	6	12	40	42	42	48	36	30		260
-----------------	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	--	-----

Sumem aqueixa fila  $x_i \cdot f_i$  i obtenim 260. Com la de freqüències  $f_i$  suma 43, les dividim, per la qual cosa la mitja resulta:  $\text{Mitja} = 260 / 43 = 6,04$ .

En general si la variable pren els valors  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , amb una freqüència absoluta  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , per a calcular la mitja es multiplica cada valor per la seua freqüència, se sumen els dits productes i es divideix pel total de dades:

$$\text{Mitja} = (x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \dots + x_n \cdot f_n) / (f_1 + f_2 + \dots + f_n)$$

### Activitats proposades

30. S'ha llançat un dau 50 vegades i s'ha confeccionat la següent taula de freqüències absolutes:

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$f_i$	9	8	7	8	8	10

Calcula la mitja i comprova que és 3,56.

31. Llancem 2 daus i sumem els valors obtinguts. Repetim l'experiment 100 vegades i obtenim les següent taula de freqüències absolutes.

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_i$	3	6	7	8	16	20	15	8	7	6	4



- Calcula la mitja.
- Repeteix ara tu els llançaments, ara només 20, i calcula novament la mitja.

### Activitat resolta

a) Una companyia d'assegurances d'automòbil ha realitzat un estudi sobre 1000 assegurats per a saber quants diners ha gastat la companyia en reparacions per accident. Les dades estan a la taula:

Diners gastat en euros	De 0 a 100	De 100 a 300	De 300 a 500	De 500 a 900	De 900 a 1100	De 1100 a 1500	Més de 1500 euros
Nombre d'assegurats	167	150	145	131	106	57	24

Ara la cosa es complica. No coneixes el valor d' $x_i$ . Pots construir la taula de freqüència substituint cada interval pel seu punt mitjà:

								<b>Suma Total</b>
$x_i$	50	200	400	700	1000	1300	1700	
$f_i$	167	150	145	131	106	57	24	780

I ara ja saps calcular la mitja. Afegim la fila dels productes  $x_i \cdot f_i$ .

$x_i \cdot f_i$	8350	30000	58000	91700	106000	74100	40800	408950
-----------------	------	-------	-------	-------	--------	-------	-------	--------

La suma d'aqueixos productes és: 408950, i la suma de les freqüències és: 780, per tant la mitja dels diners gastat en segurs és: Mitja =  $408950 / 780 = 524'3$  €.

### Activitats proposades

32. Calcula la mitja dels pesos de 40 estudiants d'un centre escolar, sabent que la taula de freqüències absolutes, amb intervals és:

Pes	35 - 41	41 - 47	47 - 53	53 - 59	59 - 65	65 - 71	71 - 77
Estudiants	1	10	12	9	5	1	2

## 3.2. Moda

Què és el que està de moda? El que més es porta.

La **moda** d'una distribució de freqüències és el valor més freqüent.

**Activitat resolta**

La moda de les taules de freqüències següents és la indicada:

a) Medi de transport

Medi de transport	Freqüència
Caminant	47
Metro	30
Autobús	15
Cotxe	8
TOTAL	100

La moda és anar *caminant*.

c) Notes

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_i$	1	2	1	2	3	8	7	6	6	4	3

La moda és 5.

d) Llançament d'un dau

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$f_i$	9	8	7	8	8	10

La moda és 6.

e) Llançament de dos daus

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_i$	3	6	7	8	16	20	15	8	7	6	4

La moda és 7.

**Nota**

Pot ocórrer que una distribució de freqüències tinga més d'una moda. Per exemple, la distribució:

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$f_i$	9	8	9	8	8	9

té 3 modes, 1, 3 i 6, ja que el valor més alt de la freqüència absoluta és 9 als tres casos.

La moda permet classificar els conjunts de dades en *unimodals*, *bimodals* o *plurimodals*, segons el nombre de modes que tinguen.

**3.3. Mitjana**

La **mitjana** és el valor central que deixa per davall el mateix nombre de dades que per damunt.

Una forma de calcular la mitjana és ordenar els valors de menor a major, i si el nombre de dades és imparell, el valor central és la mitjana. Si el nombre de dades és parell, la mitjana és la mitja de les dos dades centrals.

**Activitat resolta**

- f) La mitjana de les notes, ja ordenades següents: 2, 3, 5, 7, 9, 9, 10, és 7, perquè és el valor central d'un nombre imparell de dades.
- g) La mitjana de les notes: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10, és la mitja entre 5 i 7, és a dir, és 6, perquè 5 i 7 són els valors centrals d'un nombre parell de dades.

Cal destacar que aquesta mesura de tendència central, a diferència de la mitja, no es veu afectada per valors extrems. És a dir, la mitjana de les notes: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, continua sent la mitja entre 5 i 7, és a dir, 6.

**Activitats proposades**

**33.** Calcula la mitja, la mitjana i la moda de les distribucions següents:

- a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000
- b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10
- c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

Observa en cada cas com influeixen els valors extrems.

**3.4. Mesures de dispersió**

**Variància** és la mitjana dels quadrats de les distàncies de les dades a la mitjana.

$$\text{Variància} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Equivalentment (desenvolupant els quadrats que apareixen a l'expressió) es pot calcular mitjançant aquesta altra expressió:

$$\text{Variància} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

**Desviació típica** és l'arrel quadrada de la variància.

Es representa per  $\sigma$ .

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

**Activitats resoltes**

- a) Les altures dels 12 jugadors de la Selecció Espanyola de Bàsquet (en metres) que participaren a l'Eurocopa 2013 s'arreglen a la taula següent:

2'03	1'96	1'91	2'11	1'91	1'93	2'08	1'99	1'90	2'16	2'06	2'03
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Calculem la mitja i s'obté 2'0058. Calcula la variància i la desviació típica.



Per a calcular la **variància** primer calcularem la suma que apareix al numerador, de manera semblant a com acabem de fer. Després acabarem dividint entre el nombre de dades.

$$(2'03 - 2'0058)^2 + (2'06 - 2'0058)^2 + (2'16 - 2'0058)^2 + (1'90 - 2'0058)^2 + (1'99 - 2'0058)^2 + (2'08 - 2'0058)^2 + (1'93 - 2'0058)^2 + (1'91 - 2'0058)^2 + (2'11 - 2'0058)^2 + (1'91 - 2'0058)^2 + (1'96 - 2'0058)^2 + (2'03 - 2'0058)^2 = 0'08934$$

Així la **variància** és  $0'08934/12 = 0'00744$

La **desviació típica** és l'arrel quadrada de la variància:  $\sigma = \sqrt{0'00744} = 0'08628$ .

### Activitats proposades

**34.** Calcula la mitja, la variància i la desviació típica de les dades següents:

a) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 1000

b) 2, 3, 4, 5, 7, 9, 9, 10

c) 0, 0, 4, 5, 7, 9, 9, 1000, 2000

**35.** Donades les temperatura en una ciutat a una hora determinada el dia 1 de cada mes es té la taula següent:

	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny	Juliol	Agost	Setembre	Octubre	Novembre	Desembre
Temperatura	-1	3	8	9	11	13	20	25	21	14	9	4

Calcula la mitja, la variància i la desviació típica de les dades següents:

Si tenim freqüències relatives les expressions són:

$$\text{Variància} = \frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$$

Per tant la **desviació típica** es calcula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$$

### Activitats proposades

**36.** S'ha llançat un dau 50 vegades i s'ha confeccionat la següent taula de freqüències absolutes:

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$f_i$	9	8	7	8	8	10

La mitja és 3,56. Calcula la variància i la desviació típica.

## 4. L'ORDINADOR I L'ESTADÍSTICA

L'ordinador pot ajudar molt als càlculs estadístics. Hi ha molts programes per fer això. En particular són fàcils d'usar els fulls de càlcul. Resoldrem un problema utilitzant un d'ells.

### Activitat resolta

- a) Es coneixen les quantitats de residus sòlids arreglats en  $m^3$ /setmana durant 12 setmanes d'una urbanització:

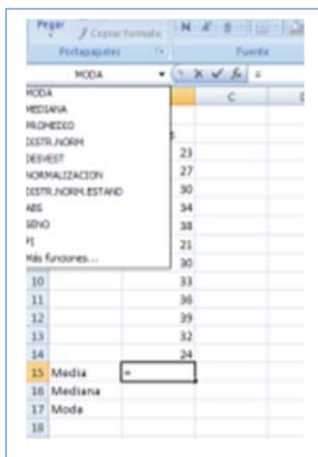
23, 27, 30, 34, 38, 21, 30, 33, 36, 39, 32, 24.

Per a calcular la **mitja**, la **mitjana** o la **moda**, obrim el full de càlcul. Consta de files indicades per les lletres A, B, C... i columnes indicades pels nombres 1, 2, 3... cada casella s'identifica per la seua columna i la seua fila, per exemple, A1 és la primera casella.

Escrivim les dades que ens han donat a la columna B a partir de la fila 3, deixant la primera columna i les dues primeres files per a posar títols.

Escrivim en B2: Residus; en A15: Mitja; en A16: Mitjana; i en A17: Moda.

Ens col·loquem sobre la casella B15. A la finestra *fx* escrivim el signe igual: =, i despleguem les funcions de la llista de l'esquerra. Ens interessen: MITJA (que és la mitja), MITJANA i MODA.



Escrivim a la casella B15:

=PROMEDI(B3:B14),

i obtenim la mitja que és 30,58.

Observa el que aqueixa expressió significa. Estàs dient a l'ordinador que calcule la mitja (mitja) de les dades que estan entre la casella B3 i la casella B14.

Per a calcular la mitjana ens col·loquem a la casella B16 i escrivim:

=MITJANA(B3:B14),

i per a calcular la moda ens col·loquem a

B17 i escrivim: =MODA(B3:B14).

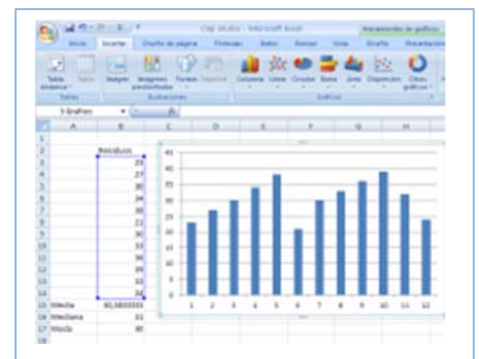
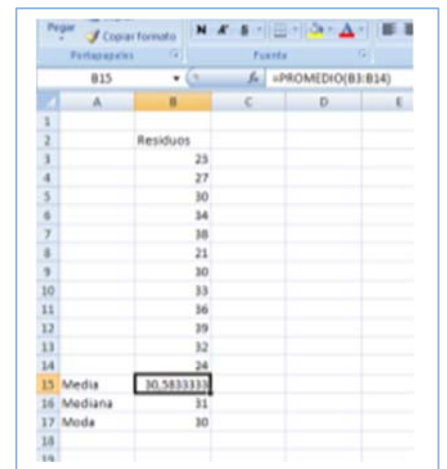
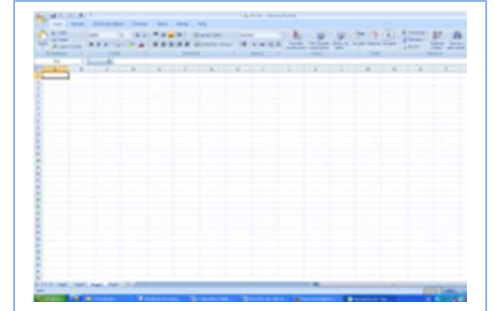
Hem obtingut que la mitjana és 31 i la moda és 30.

Pots investigar la quantitat de funcions que té l'ordinador que també calcula (i que encara no coneixes), desviació típica, coeficient de curtosis, valor mínim, valor màxim, quartil...

També dibuixa gràfiques amb facilitat. Perquè tinga sentit hauríem d'agrupar les dades en una taula. Però si desenvolupes el menú "d'Inserir" pots veure els tipus de gràfiques que pots dibuixar: de columna, línia, circular, barra, dispersió...

Hem dibuixat un diagrama de rectangles seleccionat les dades i inserint un gràfic de columnes.

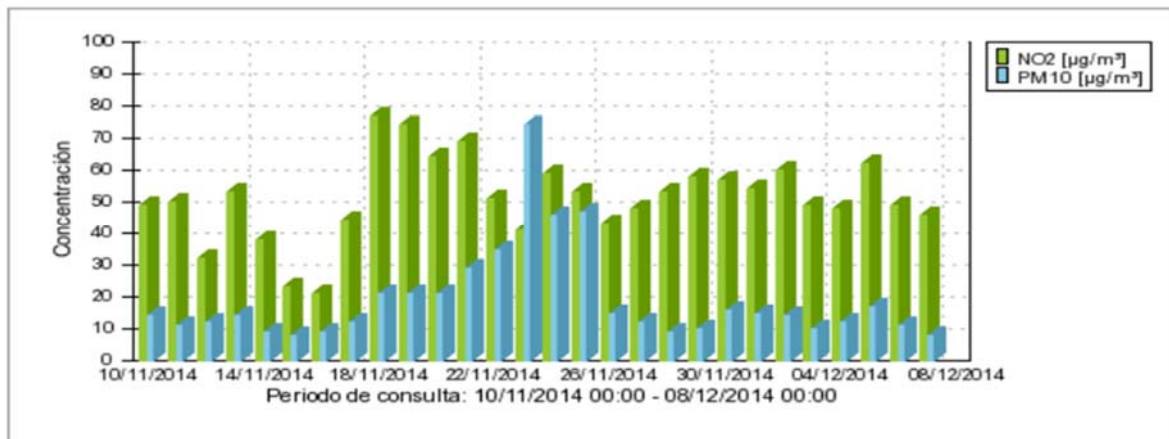
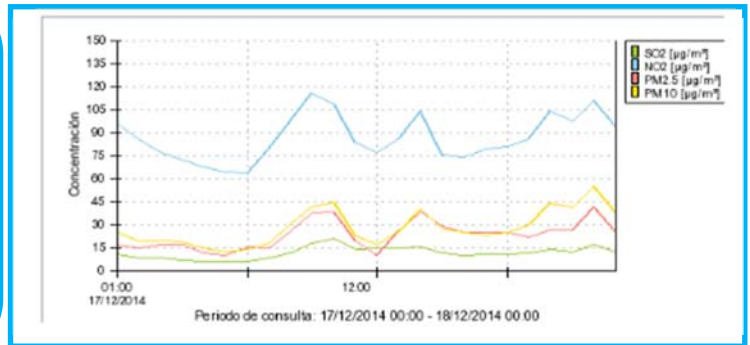
Juga amb l'ordinador. Insereix altres gràfics diferents de columna, de línia, circular, barra, dispersió i indica a quin tipus de representació corresponen.



## CURIOSITATS. REVISTA

### Sèries temporals sobre la qualitat de l'aire a Madrid

A Madrid es controla la qualitat de l'aire. Pots veure al **diagrama de línies** les concentracions de **NO<sub>2</sub>**, **SO<sub>2</sub>** i **partícules** durant un dia a l'estació de Quatre Camins. A l'eix d'abscisses apareix el temps, les 24 hores. A l'eix d'ordenades les distintes concentracions



Tenim ara un **diagrama de barres** també de l'estació de Quatre Camins d'únicament NO<sub>2</sub> i partícules amb els valors **mitjans** diaris durant quatre setmanes, a partir del 8 de desembre. Analitza aquesta nova sèrie temporal. Consideres que aquests valors són alts o són baixos?



**Diagrama de barres** de la concentració d'ozó a l'estació de la Casa de Camp amb els valors **mitjans** mensuals obtinguts durant un any. Quan és major la concentració d'ozó, a l'hivern o a l'estiu?

La Comunitat de Madrid i l'Ajuntament de Madrid controlen la qualitat de l'aire, la qual cosa és obligatòria per a complir amb les directives europees. Pots buscar informació a Internet escrivint: <http://www.mambiente.munimadrid.es/svca/index.php>. o simplement "qualitat de l'aire a Madrid".

RESUM

		Exemples
<b>Fenomen o experiment aleatori</b>	És aquell en què no es pot predir el resultat. Les dades estadístiques són els valors que s'obtenen en un experiment.	Tirar una moneda i saber si eixirà cara o creu
<b>Freqüència absoluta</b>	Nombre de vegades que es repeteix una dada estadística	Si en tirar un dau obtenim 2 vegades el 3, 2 és la freqüència absoluta de 3.
<b>Freqüència relativa</b>	Freqüència absoluta dividit pel nombre d'experiments	Si es realitza un experiment 500 vegades i la freqüència absoluta d'un succés és 107, la freqüència relativa és 107/500.
<b>Freqüència acumulada</b>	Se sumen les freqüències anteriors	
<b>Succés possible.</b>	Possible resultat d'un experiment aleatori	A l'experiment aleatori tirar un donat el conjunt de possibles resultats, o el conjunt de successos elementals o espai mostral és {1, 2, 3, 4, 5, 6}, per tant, un possible resultat és, per exemple, 3.
<b>Espai mostral</b>	Conjunt de resultats possibles	
<b>Successos elementals</b>	Elements de l'espai mostral	
<b>Diagrama de rectangles</b>	Les dades es representen mitjançant rectangles de la mateixa base i d'altura proporcional a la freqüència. S'indica a l'eix horitzontal la variable i al vertical les freqüències.	<p><b>Diagrama...</b></p> <p>100  100</p> <p><b>Polígon de...</b></p> <p>100  100</p> <p><b>Diagrama...</b></p> <p></p>
<b>Diagrama de línies</b>	S'uneixen els punts superiors d'un diagrama de rectangles	
<b>Pictograma</b>	Se substitueix els rectangles per un dibuix representatiu	
<b>Diagrama de sectors</b>	En un cercle es dibuixen sectors d'angles proporcionals a les freqüències	
<b>Mitja aritmètica</b>	És el quocient entre la suma de totes les dades i el nombre total de dades.	
<b>Mitjana</b>	Deixa per davall la meitat dels valors i per damunt l'altra meitat	
<b>Moda</b>	El valor que més es repeteix.	

**EXERCICIS I PROBLEMES de 2n d'ESO****L'atzar i la probabilitat**

1. Una urna que conté 10 boles numerades del 0 al 9, traiem una bola, anotem el nombre i tornem la bola a l'urna. Repetim l'experiment 1000 vegades i s'han obtingut els resultats indicats a la taula:

Resultat	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Freqüència absoluta	79	102			93	98	104	77		
Freqüència relativa			0,12	0,13					0,1	
Freqüència absoluta acumulada	79	181								
Freqüència relativa acumulada										1

- Quina és la freqüència absoluta de 9?
- Quina és la freqüència absoluta acumulada de 2?
- Quina és la freqüència relativa acumulada d'1?
- Copia la taula al teu quadern i emplena-la.

2. Classifica els següents successos en impossibles, poc probable, possibles, molt probable i segurs:

- Tindre un accident de tràfic.
- Eixir de passeig i creuar algun carrer.
- Eixir de passeig i que caiga un raig.
- Demà nasca algun xiquet a París.
- Demà no isca el sol.
- Demà plouga.

3. Pepa ha tirat un dau 25 vegades i ha obtingut els resultats següents:

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

- Escriu al teu quadern una taula de freqüències absolutes.
- Escriu una altra de freqüències relatives.
- Dibuixa un diagrama de rectangles.
- Dibuixa un diagrama de línies i una representació per sectors.

4. La duració en minuts d'unes telefonades ha sigut:

7, 3, 6, 3, 7, 5, 4, 3, 5, 7, 10, 1, 9, 12, 2

Elabora una taula de freqüències absolutes i una taula de freqüències relatives.

## Gràfics estadístics

5. Es fa una enquesta sobre el nombre de vegades que van uns jòvens al mes al cine. Les dades estan a la taula:

Vegades que van al cine	0	1	2	3	4	5
Freqüència absoluta	1	7	9	5	2	1

- a) Representa un diagrama de rectangles de freqüències absolutes.  
 b) Representa un diagrama de línies de freqüències relatives.  
 c) Fes un pictograma  
 d) Representa les dades en un diagrama de sectors.
6. Es fa un estudi sobre el que es recicla en una ciutat i es fa una taula amb el pes en percentatge dels distints tipus de residus:

Tipus de residu	Percentatge
Orgànic	15
Paper i cartó	1
Vidre	15
Plàstic	1
Piles	15

- a) Fes un diagrama de rectangles  
 b) Representa un diagrama de línies.  
 c) Fes un pictograma  
 d) Representa les dades en un digrama de sectors.

7. Quant val la suma de les altures d'un diagrama de rectangles de freqüències relatives.

8. S'ha mesurat en una classe la grandària de les mans de cada un dels alumnes, i el resultat en centímetres ha sigut el següent:

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,  
 16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,  
 23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

Representa les dades en un diagrama de rectangles i en un diagrama de línies.

9. En una classe s'ha preguntat per les preferències esportives i s'ha obtingut:

Futbol	Bàsquet	Natació	Karate	Ciclisme
8	9	7	6	10

- a) Copia la taula al teu quadern i fes una taula de freqüències relatives.



- b) Representa aquestes dades en un diagrama de sectors.  
c) Fes un pictograma.

**10. El 35 % de les cigonyes no ha emigrat enguany a Àfrica i el 6 % morí pel camí. Dibuixa un diagrama per sectors que descriu aquesta situació.**

### Mesures de centralització

**11. Xavier ha tirat un dau 10 vegades i ha obtingut els resultats següents:**

6, 3, 1, 4, 2, 2, 1, 4, 3, 4

Calcula la mitja aritmètica.

**12. Raquel ha tingut les següents notes als seus exàmens de Llengua: 7, 5, 6, 4, 7, 10, 7. Calcula la mitja aritmètica.**

**13. S'ha mesurat la grandària de la mà de 10 alumnes, i el resultat en centímetres ha sigut el següent:**

19, 18, 21, 21, 18, 17, 18, 17, 19, 21

Calcula la mitja aritmètica.

**14. Ens interessa conèixer la distribució de notes obtingudes per 20 estudiants. Les notes són:**

2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1

- a) Escriu al teu quadern una taula de freqüències absolutes.  
b) Fes un diagrama de línies de freqüències absolutes.  
c) Calcula la mitja.

**15. Els jugadors d'un equip de bàsquet té les edats següents:**

13, 12, 14, 11, 12, 12.

Calcula la mitja.

**16. Fem una enquesta preguntant a 10 famílies quantes fills tenen. Els resultats són:**

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 2, 1, 1

Calcula la mitja.

**17. Pepa ha tirat un dau 25 vegades i ha obtingut els resultats següents:**

1, 2, 5, 6, 3, 1, 4, 5, 6, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 6, 2, 2, 4, 3, 4, 6, 6, 1, 4

- Calcula la mitja aritmètica
- Calcula la mitjana
- Quina és la moda? És única?

**18. Sara ha tingut les següents notes als seus exàmens de Matemàtiques: 9, 7, 8, 6, 9, 10, 9**

- Calcula la mitja aritmètica
- Calcula la mitjana
- Quina és la moda? És única?

**19. S'ha tingut el resultat de mesurar en una classe la grandària de les mans de cada un dels alumnes, i el resultat en centímetres ha sigut el següent:**

19, 18, 20, 19, 18, 21, 19, 17, 16, 20,

16, 19, 20, 21, 18, 17, 20, 19, 22, 21,

23, 21, 17, 18, 17, 19, 21, 20, 16, 19

- Calcula la mitja aritmètica
- Calcula la mitjana
- Quina és la moda? És única?

**20. Ens interessa conèixer la distribució de notes obtingudes per 40 estudiants. Les notes són:**

4, 1, 7, 10, 3, 2, 8, 9, 0, 0, 5, 8, 2, 7, 1, 2, 8, 10, 2, 10,

3, 4, 8, 9, 3, 6, 3, 7, 2, 4, 9, 4, 9, 5, 1, 3, 3, 9, 7, 8, 10

Escriu al teu quadern una taula de freqüències absolutes.

- Fes un diagrama de línies de freqüències absolutes.
- Calcula la mitja
- Calcula la mitjana
- Calcula la moda

**21. Fem una enquesta preguntant a 10 famílies quantes mascotes tenen. Els resultats són:**

0, 1, 0, 2, 1, 4, 3, 0, 0, 1

Calcula la mitja, la mitjana i la moda.

**22. Els jugadors d'un equip d'handbol té les edats següents:**

12, 14, 13, 12, 15, 11, 12, 12, 13, 14, 11, 12, 12.

Calcula la mitja

Calcula la mitjana

Calcula la moda

## Ordinador

**23. Introdueix les dades de l'enquesta sobre el nombre de mascotes en l'ordinador i torna a calcular la mitja, la mitjana i la moda.**

**24. Organitza les dades en una taula calculant les freqüències absolutes de 0, 1, 2, 3 i 4. Introdueix aquesta taula a l'ordinador i fes una representació de barres, un diagrama de línies i un diagrama de sectors.**

**25. Utilitza l'ordinador per a comprovar els resultats obtinguts als exercicis anteriors.**

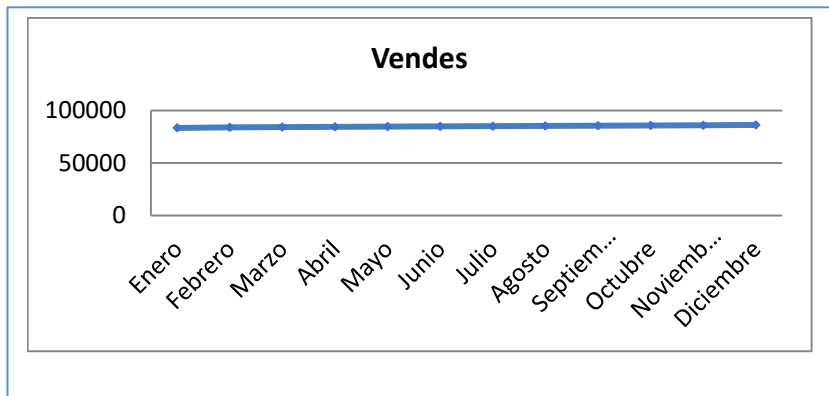
**26. Realitza una enquesta en la teua classe i porta els resultats a un ordinador per a fer un informe. L'enquesta podria ser, per exemple, si li agrada o no una determinada sèrie de televisió, o un programa; o el nombre de dies de la setmana que fan algun esport, el tipus de música que els agrada; o... Pensa sobre què podries preguntar.**

## Problemes

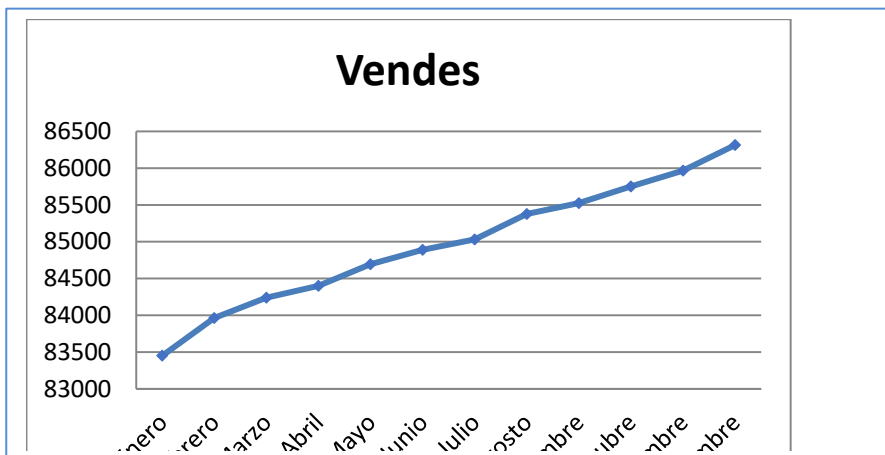
27. El Director Comercial d'una empresa serà avaluat. Per a això ha de donar explicacions dels resultats obtinguts. Vol quedar bé, perquè això li pot suposar un augment de sou. S'han venut les quantitats següents:

Mesos	Gener	Febrer	Març	Abril	Maig	Juny	Juliol	Agost	Setembre	Octubre	Novembre	Desembre
Vendes	83451	83962	84238	84401	84693	84889	85032	85378	85524	85751	859967	86316

L'estadístic de l'empresa li ha entregat la següent gràfica:



No li ha agradat gens i per a la presentació ell s'ha confeccionat el següent gràfic:



Ambdós gràfics són correctes.

Escriu un informe sobre com poden els distints gràfics donar impressions tan diferents.

28. Tira una moneda 100 vegades i anota els resultats obtinguts: C, C, x, .... Construeix una nova llista anotant, cada vegada que haja eixit cara, el resultat següent: C, x, ...Confecciona després dues taules: una de freqüències absolutes i una altra de freqüències relatives. Representa els resultats en un diagrama de barres i en un diagrama de sectors.

29. Es coneix el volum setmanal de residus sòlids arreplegats en  $m^3$  durant les 52 setmanes d'un any, en un municipi xicotet: 25'5, 27'1, 31'8, 34'2, 38'9, 21'3, 28'7, 33'2, 36'5, 39'6, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 26'7, 29'6, 31'3, 30'5, 28'3, 29'1, 26'7, 25'2, 24'5, 23'7, 25'4, 27'2, 31'7, 34'5, 38'4, 21'2, 28'1, 33'7, 36'8, 39'9, 31'7, 34'4, 38'2, 21'9, 28'1, 33'5, 25'2, 24'7, 23'2, 23'3, 22'2, 26'4, 25'9, 24'1, 23'2, 23'6, 26'4.

Calcula la mitja, la moda, la mitjana , la variància i la desviació típica.

**30. Amb les dades del problema anterior:**

Representa les dades en una taula prenent intervals de longitud dos  $m^3$ : (21, 23), (23,25), ... (39, 41)

Dibuixa un diagrama de rectangles i un diagrama de línies de freqüències absolutes..

Quantes famílies tenen un volum de fem major que  $31 m^3$ ?

Quin percentatge de famílies tenen un volum de fem menor que  $35 m^3$ ?

**31. Busca en revistes o periòdics dues gràfiques estadístiques, retalla-les i aplega-les al teu quadern. Moltes vegades aquestes gràfiques tenen errors. Observa-les detingudament i comenta les qüestions següents:**

Està clara la variable a què es referix? I les freqüències?

Són correctes les unitats? Poden millorar-se?

Comenta les gràfiques.

**32. La mitja de sis nombres és 5. S'afigen dos nombres més però la mitja continua sent 5. Quant sumen aquests dos nombres?**

AUTOAVALUACIÓ de 2n d'ESO

Indica la resposta correcta:

- a) La freqüència relativa s'obté dividint per 100 la freqüència absoluta
- b) La freqüència relativa s'obté sumant tots els valors anteriors
- c) La freqüència relativa s'obté dividint la freqüència absoluta pel total d'experiments.
- d) Freqüència relativa és el mateix que probabilitat

S'extrau una carta d'una baralla espanyola. La probabilitat que siga un rei és:

- a)  $1/40$
- b) 0,25
- c)  $4/40$
- d)  $10/40$

Indica quina és la frase que falta a la definició següent:

En ... .. les freqüències es representen en un cercle que es divideix en sectors circulars d'amplituds proporcionals a les freqüències.

- a) Diagrama de línies
- b) Diagrama de rectangles
- c) Pictograma
- d) Diagrama de sectors

Si en una taula de freqüències a un valor li correspon una freqüència relativa de 0,125, en dibuixar un diagrama de sectors l'angle corresponent és de:

- a)  $45^\circ$
- b)  $30^\circ$
- c)  $60^\circ$
- d)  $72^\circ$

En un diagrama de rectangles de freqüències relatives, la suma de les seues altures és igual a:

- a) 100
- b) 1
- c) Total de dades
- d) Suma de les seues bases

La mitja de les següents dades 7; 0; 9,5; 2; 4,1; 3,8, és:

- a) 6,3
- b) 3,8
- c) 4,4
- d) 5,5

La mitjana de les següents dades 3, 4, 6, 7, 8, és:

- a) 6
- b) 7
- c) 4
- d) 5

La moda de les següents dades 3, 4, 6, 7, 5, 8, 7, 7, és:

- a) 6
- b) 7
- c) 4
- d) 5

Es tira un dau. Quina és la probabilitat que no siga un 2?

- a)  $3/4$
- b)  $1/6$
- c)  $2/6$
- d)  $5/6$

Volem saber els esports que fan els escolars d'un cert centre. Passem una enquesta a 20 de 2n A. Indica en aquest cas quina és la població i quina és una mostra:

- a) Estudiants d'Espanya i estudiants d'aqueix centre
- b) Estudiants d'aqueix centre i estudiants de 2n A
- c) Estudiants d'aqueix centre i els 20 estudiants de 2n A
- d) Estudiants de 2n A i els 20 estudiants triats de 2n A