

Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades:

3º A d'ESO. Capítol 5: Equacions de segon grau i sistemes lineals

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-039136

Fecha y hora de registro: 2014-04-07 18:20:55.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



www.apuntesmareaverde.org.es



Autora: Raquel Hernández

Revisors: Sergio Hernández i María Molero

Il·lustracions: Raquel Hernández i Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Índex

1. EQUACIONS DE 2n GRAU

- 1.1. CONCEPTE D'EQUACIÓ DE 2n GRAU
- 1.2. RESOLUCIÓ D'EQUACIONS DE 2n GRAU COMPLETES
- 1.3. NOMBRE DE SOLUCIONS D'UNA EQUACIÓ DE 2n GRAU COMPLETA
- 1.4. RESOLUCIÓ D'EQUACIONS DE 2n GRAU INCOMPLETES
- 1.5. SUMA I PRODUCTE DE LES ARRELS

2. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

- 2.1. CONCEPTE DE SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS
- 2.2. CLASSIFICACIÓ DE SISTEMES D'EQUACIONS
- 2.3. RESOLUCIÓ DE SISTEMES PEL MÈTODE DE SUBSTITUCIÓ
- 2.4. RESOLUCIÓ DE SISTEMES PEL MÈTODE D'IGUALACIÓ
- 2.5. RESOLUCIÓ DE SISTEMES PEL MÈTODE DE REDUCCIÓ

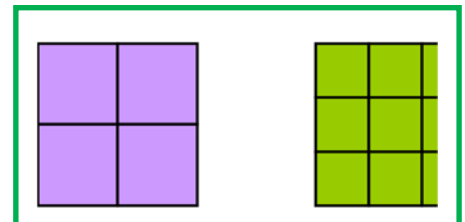
3. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

- 3.1. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES MITJANÇANT EQUACIONS DE 2n GRAU
- 3.2. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES MITJANÇANT SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

Resum

Ja saps resoldre algunes equacions de segon grau. Si l'àrea d'un quadrat és 4 saps que el seu costat és 2, i si l'àrea és 9, saps que el costat mesura 3.

Saps resoldre $x^2 = 4$, les solucions del qual són 2 i -2 , perquè $(2)^2=4$, i $(-2)^2 = 4$.

**Recorda**

Si el producte de dos factors és zero, un dels factors ha de ser zero.

Per tant a l'equació:

$$(x + 4) \cdot (x - 3) = 0$$

o bé $x + 4 = 0$ o bé $x - 3 = 0$, per la qual cosa $x = -4$ i $x = 3$.

Per a resoldre $(x - 3) \cdot (x + 4) = 0$, observes que les solucions són 3 i -4 perquè $(3 - 3) \cdot (3 + 4) = 0$, i $((-4) - 3) \cdot ((-4) + 4) = 0$.

En aquest capítol aprendrem a resoldre les equacions de segon grau, ja siguin completes o incompletes, i a utilitzar allò que s'ha après per a resoldre problemes de la vida quotidiana per mitjà de les equacions.

Veurem a més què són els sistemes d'equacions lineals, com es resolen per diferents mètodes i la seua aplicació per a resoldre problemes que ens rodegen.

1. EQUACIONS DE 2n GRAU

Hi ha equacions de segon grau que ja saps resoldre. En aquest capítol aprofundirem i aprendrem a resoldre aquest tipus d'equacions. Per exemple, el següent problema ja saps resoldre'l:

Activitats resoltes

- S'augmenta el costat d'un taulell quadrat en 3 cm i la seua àrea ha quedat multiplicada per 4, Quin costat tenia el taulell?

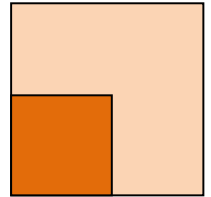
Plantegem l'equació:

$$(x + 3)^2 = 4x^2$$

Aquesta equació si saps resoldre-la! $x + 3 = 2x$, doncs el costat és de 3 cm.

Hi ha una altra solució, $x = -1$, que no té sentit com a costat d'un quadrat.

Estudiarem de forma ordenada aquestes equacions.



1.1. Concepte d'equació de 2n grau

Una **equació de segon grau** és una equació polinòmica en la que la major potència de la incògnita és 2. Les equacions de segon grau es poden escriure de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on a, b i c són nombres reals, amb $a \neq 0$.

Exemple 1:

- Són equacions de 2º grau per exemple

$$3x^2 - 7x + 1 = 0; \quad -2x^2 + 5x - 2 = 0; \quad x^2 - 9x - 11 = 0.$$

Exemple 2:

- Els coeficients de les equacions de 2n grau són nombres reals, per tant poden ser fraccions o arrels. Per exemple:

$$\frac{3}{5}x^2 - 4x + \frac{1}{2} = 0; \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{4} = 0; \quad -2,7x^2 + 3,5x - 0,2 = 0; \quad \sqrt{2}x^2 + 3x - \sqrt{5} = 0.$$

Activitats proposades

1. Indica si són equacions de segon grau les equacions següents:

a) $5x^2 - \sqrt{2}x + 8 = 0$

c) $8x^2 - 9 = 0$

e) $2x^2 - \frac{3}{x} = 0$

b) $3xy^2 - 5 = 0$

d) $8 - 7,3x = 0$

f) $2x^2 - 3\sqrt{x} + 4 = 0$

2. A les següents equacions de segon grau, indica qui són a , b i c .

a) $3 - 4x^2 + 9x = 0$ b) $-3x^2 + 5x = 0$

c) $2x^2 - 3 = 0$ d) $x^2 - 8x + 1 = 0$

1.2. Resolució d'equacions de 2º grau completes

S'anomena **equació de segon grau completa** a aquella que té valors diferents de zero per a a , b i c .

Per a resoldre les equacions de segon grau completes, usarem la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aquesta fórmula ens permet calcular les dues solucions de la nostra equació.

Anomenarem **discriminant** a la part de la fórmula que està a l'interior de l'arrel:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Activitats resoltes

- Resol l'equació de segon grau $x^2 - 5x + 6 = 0$

Primer hem de saber qui són a , b i c :

$$a = 1; b = -5; c = 6$$

Substituint aquests valors a la nostra fórmula, obtenim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Per tant, les nostres dues solucions són:

$$x_1 = \frac{5+1}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = 2$$

En efecte, $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$, y $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$, doncs 3 i 2 són solucions de l'equació.

Activitats proposades

3. Resol les següents equacions de 2n grau completes:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$ b) $2x^2 + 2x - 24 = 0$

c) $3x^2 - 9x + 6 = 0$ d) $x^2 - 4x - 12 = 0$

1.3. Nombre de solucions d'una equació de 2n grau completa

Abans hem definit el que era el **discriminant**, et recordes?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Per a saber quantes solucions té una equació de 2n grau, ens anem a fixar en el signe del discriminant.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'equació té dues solucions reals i distintes.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ l'equació té dues solucions reals iguals, (una solució doble).

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ l'equació no té solució.

Exemple 3:

a) L'equació $2x^2 - 4x - 7 = 0$ té com a discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 16 + 28 = 44 > 0$$

Per tant, l'equació donada té 2 solucions reals i distintes, 5 i -1. (Comprobació: $5^2 - 4 \cdot 5 - 7 = 25 - 20 - 7 = 0$ i $(-1)^2 - 4(-1) - 7 = 1 + 4 - 7 = 0$).

b) L'equació $x^2 - 2x + 1 = 0$ té com a discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

Per tant, l'equació té dues solucions reals iguals. Es pot escriure com:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0, \text{ que té la solució doble } x = 1.$$

c) L'equació $x^2 + 3x + 8 = 0$ té com a discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8) = 9 - 32 = -23 < 0$$

Per tant, l'equació no té solució real. Cap nombre real verifica l'equació.

Activitats proposades

4. Esbrina quantes solucions tenen les següents equacions de 2º grau:

a) $x^2 + x + 4 = 0$ b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $x^2 - 6x - 7 = 0$ d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

1.4. Resolució d'equacions de 2n grau incompletes

Anomenem **equació de 2n grau incompleta** a aquella equació de segon grau en què el coeficient b val 0 (falta b), o el coeficient c val 0 (falta c).

Exemple 4:

L'equació de 2n grau $2x^2 - 18 = 0$ és incompleta perquè el coeficient $b = 0$, és a dir, falta b .

L'equació de 2n grau $3x^2 - 15x = 0$ és incompleta perquè no té c , és a dir, $c = 0$.

Les equacions de 2n grau incompletes es resolen d'una manera o una altra depenent del tipus que siguin.

Si el coeficient $b = 0$: Aïllem la incògnita normalment, com féiem a les equacions de primer grau:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si el coeficient $c = 0$: Traiem factor comú:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0.$$

Perquè el producte de dos factors valga zero, un dels factors ha de valdre zero.

Per tant $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

Exemple 5:

En l'equació $2x^2 - 18 = 0$ falta la b . Per a resoldre-la aïllem la incògnita, és a dir, x^2 :

$$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 18/2 = 9$$

Una vegada que arribem aquí, ens falta llevar aqueix quadrat que porta nostra incògnita. Per a això, farem l'arrel quadrada als 2 membres de l'equació:

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Així hem obtingut les dues solucions de la nostra equació, 3 i -3. En efecte, $2 \cdot 3^2 - 18 = 2 \cdot 9 - 18 = 0$, i $2 \cdot (-3)^2 - 18 = 2 \cdot 9 - 18 = 0$

Resum

Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, aïllem la incògnita:

Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$, traiem factor comú:

$$x = 0 \text{ i}$$

Exemple 6:

A l'equació $3x^2 - 15x = 0$ falta la c . Per a resoldre-la, traiem factor comú:

$$3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$$

Una vegada que arribem ací, tenim dues opcions

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

2) $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$.

Així hem obtingut les dues solucions de l'equació $x = 0$ i $x = 5$

Una equació de segon grau incompleta també es pot resoldre utilitzant la fórmula de les completes però és un procés més lent i és més fàcil equivocar-se.

Activitats resoltes

- Resol l'equació de 2n grau $2x^2 - 32 = 0$:

Solució: Es tracta d'una equació de 2n grau incompleta on falta la b . Per tant, aïllem la incògnita

$$2x^2 - 32 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 32/2 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4. \text{ Les arrels són } 4 \text{ i } -4.$$

- Resol l'equació de 2n grau $x^2 + 7x = 0$:

Solució: Es tracta d'una equació de 2n grau incompleta on falta la c . Per tant, traiem factor comú:

$$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0$$

i obtenim les dues solucions:

$$x = 0 \text{ i } x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7.$$

Activitats proposades

5. Resol les següents equacions de 2n grau incompletes:

a) $3x^2 + 6x = 0$

b) $3x^2 - 27 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$

d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 9 = 0$

f) $5x^2 - 10x = 0$

1.5. Suma i producte d'arrels

Si a una equació de segon grau: $x^2 + bx + c = 0$, amb $a = 1$, coneixem les seues solucions: x_1 i x_2 sabem que podem escriure l'equació de forma factoritzada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Fem operacions:

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

per tant el coeficient c és igual al producte de les solucions i la suma de les solucions és igual a l'oposat del coeficient b , és a dir, $-b$.

$$x_1 \cdot x_2 = c; \quad x_1 + x_2 = -b.$$

Si l'equació és $ax^2 + bx + c = 0$, dividint per a , ja tenim una de coeficient $a = 1$, i obtenim que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}; \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Aquesta propietat ens permet, de vegades, resoldre mentalment algunes equacions de segon grau.

Activitats resoltes

- Resol mentalment l'equació $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Busquem, mentalment dos nombres el producte del qual siga 6 i la suma del qual siga 5. En efecte, $2 \cdot 3 = 6$, i $2 + 3 = 5$, doncs les solucions de l'equació són 2 i 3.

- Resol mentalment l'equació $x^2 - 6x + 9 = 0$.

El producte ha de ser 9. Provem amb 3 com a solució, i en efecte $3 + 3 = 6$. Les solucions són l'arrel 3 doble.

- Resol mentalment l'equació $x^2 - x - 2 = 0$.

Les solucions són -1 i 2 , perquè el seu producte és -2 i la seua suma 1 .

- Resol mentalment l'equació $x^2 + x - 2 = 0$.

Les solucions són 1 i -2 , perquè el seu producte és -2 i la seua suma -1 .

Activitats proposades

6. Resol mentalment les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 + 6x = 0$

b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 - 25 = 0$

d) $x^2 - 9x + 20 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$

f) $x^2 - 4x - 21 = 0$

7. Escriu una equació de segon grau les solucions de la qual siguen 3 i 7.

8. El perímetre d'un rectangle mesura 16 cm i la seua àrea 15 cm². Calcula les seues dimensions.

9. Si 3 és una solució de $x^2 - 5x + a = 0$, quant val a ?

2. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

2.1. Concepte de sistema d'equacions lineals

Un **sistema d'equacions lineals** amb dues incògnites es pot expressar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On a , b , a' i b' són nombres reals que es denominen **coeficients** i c i c' també són nombres reals denominats **termes independents**.

Anomenem **solució** del sistema al parell de valors (x, y) que satisfan les dues equacions del sistema.

Es diu que dos sistemes d'equacions són **equivalents**, quan tenen la mateixa solució.

Exemple 7:

Són sistemes d'equacions lineals, per exemple:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4y + 2 = 3x \\ 7x - 3 = 5y \end{cases}$$

Exemple 8:

No és un sistema lineal $\begin{cases} 3xy + 5y = 7 \\ 4x - 8xy = 9 \end{cases}$ perquè té termes en xy .

Tampoc ho és $\begin{cases} 3x^2 + 5y = 7 \\ 4x - 8y = 9 \end{cases}$ perquè té un terme en x^2 .

Activitats proposades

10. Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els sistemes següents:

a) $\begin{cases} xy + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

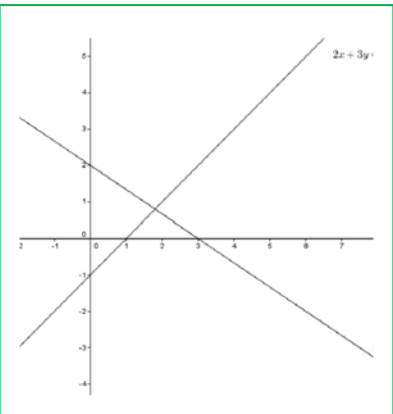
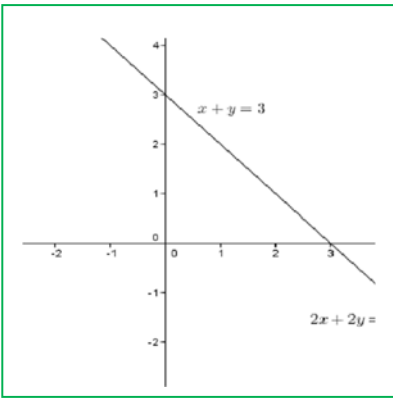
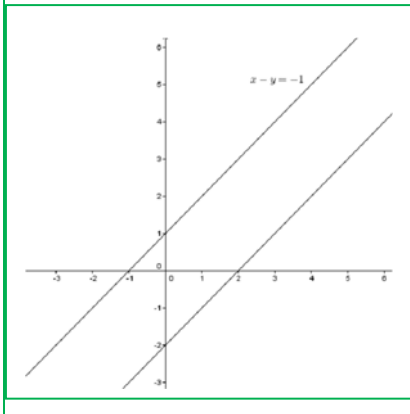
c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

2.2. Classificació de sistemes d'equacions

A un sistema d'equacions lineals amb dues incògnites, cada una de les equacions representa una recta al pla.

Aquestes rectes poden estar posicionades entre si de tres maneres distintes, la qual cosa ens ajudarà a classificar el nostre sistema en:

- 1) **Compatible determinat:** el sistema té una única solució, per la qual cosa les rectes són **SECANTS**, es tallen en un punt.
- 2) **Compatible indeterminat:** el sistema té infinites solucions, per la qual cosa les rectes són **COINCIDENTS**.
- 3) **Incompatible:** el sistema no té solució, per la qual cosa les rectes són **PARAL·LELES**.

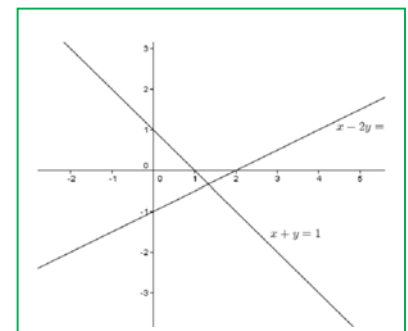
		
Compatible determinat	Compatible indeterminat	Incompatible
Rectes secants	Rectes coincidentes	Rectes paral·leles

Activitats resoltes

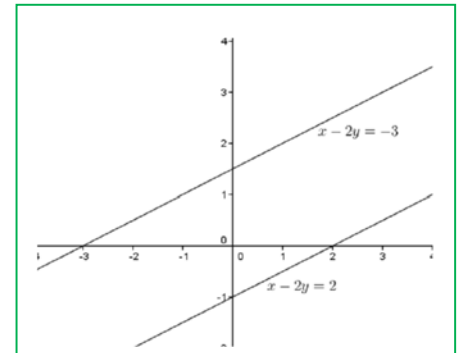
- Afig una equació a $x - 2y = 2$ perquè el sistema resultant siga:
 - a) Compatible determinat
 - b) Incompatible
 - c) Compatible indeterminat

Solució:

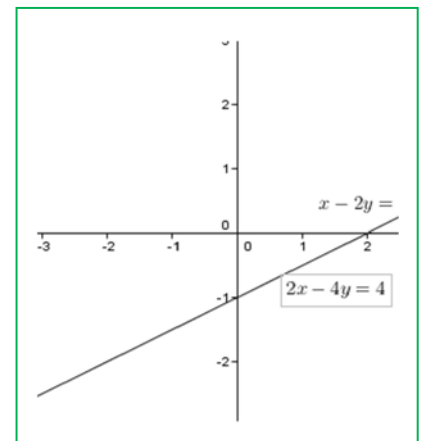
a) Perquè el sistema siga compatible determinat, afegirem una equació que no tinga els mateixos coeficients que la que ens donen. Per exemple, $x + y = 1$.



b) Perquè siga incompatible, els coeficients de les incògnites han de ser els mateixos (o proporcionals) però tindre diferent terme independent. Per exemple $x - 2y = -3$, (o $2x - 4y = 0$).



c) Perquè siga compatible indeterminat, posarem una equació proporcional a la que tenim. Per exemple $2x - 4y = 4$.



Activitats proposades

11. Representa els següents sistemes i classifica'ls:

a) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -y + 2x = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$

2.3. Resolució de sistemes pel mètode de substitució

El **mètode de substitució** consisteix a aïllar una incògnita d'una de les equacions del sistema i substituir l'expressió obtinguda en l'altra equació.

Així, obtenim una equació de primer grau en la que podem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, obtenim el valor de l'altra incògnita.

Exemple 8:

Resoldrem el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ pel mètode de substitució:

Aïllem x de la segona equació:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

i la substituïm en la primera:

$$2(3 - 2y) - 3y = -1 \Rightarrow 6 - 4y - 3y = -1 \Rightarrow -4y - 3y = -1 - 6 \Rightarrow -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$$

Amb el valor obtingut de y , calculem la x :

$$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Solució:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Activitats proposades

12. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

2.4. Resolució de sistemes pel mètode d'igualació

El **mètode d'igualació** consisteix a aïllar la mateixa incògnita de les dues equacions que formen el sistema i igualar els resultats obtinguts.

Així, obtenim una equació de primer grau en què podrem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, calculem el valor de l'altra incògnita.

Exemple 8:

Resoldrem el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ pel mètode d'igualació:

Aïllem la mateixa incògnita a les dues equacions que formen el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \Rightarrow x = \frac{3y - 1}{2} \\ x + 2y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y \end{cases}$$

Igualem ara els resultats obtinguts i resollem l'equació resultant:

$$\frac{3y-1}{2} = 3-2y \Rightarrow 3y-1 = 2(3-2y) = 6-4y \Rightarrow 3y+4y = 6+1 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{7} = 1$$

Amb el valor obtingut de y , calculem la x :

$$x = 3 - 2y \Rightarrow x = 3 - 2 \cdot (1) = 1$$

Solució:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Activitats proposades

13. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + 3y = -5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 7x - 4y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

2.5. Resolució de sistemes pel mètode de reducció

El **mètode de reducció** consisteix a eliminar una de les incògnites sumant les dues equacions. Per a això es multipliquen una o ambdues equacions per un nombre de manera que els coeficients de x o y siguin iguals però de signe contrari.

Exemple 9:

Resoldrem el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ pel mètode de reducció:

Multipliquem la segona equació per -2 perquè els coeficients de la x siguin iguals però de signe contrari i sumem les equacions obtingudes:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \xrightarrow{(-2)} \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -2x - 4y = -6 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumamos}} -7y = -7 \Rightarrow y = (-7)/(-7) = 1$$

Amb el valor obtingut de y , calculem la x :

$$2x - 3 \cdot 1 = -1 \Rightarrow 2x = -1 + 3 = 2 \Rightarrow x = 2/2 = 1$$

Solució:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Activitats proposades

14. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = 14 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x + y = 7 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$$

3. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

3.1. Resolució de problemes mitjançant equacions de 2n grau

Per a resoldre problemes per mitjà d'equacions de 2n grau, primer haurem de passar a llenguatge algebraic l'enunciat del problema i després resoldre'l seguint els passos següents:

- 1.- Comprendre l'enunciat
- 2.- Identificar la incògnita
- 3.- Traduir l'enunciat al llenguatge algebraic
- 4.- Plantejar l'equació i resoldre-la
- 5.- Comprovar la solució obtinguda

Activitats resoltes

Resoldrem el problema següent:

- *Quin és el nombre natural el quíntuple del qual augmentat en 6 és igual al seu quadrat?*

Una vegada comprés l'enunciat, identifiquem la incògnita, que en aquest cas, és el nombre que estem buscant.

2.- nombre buscat = x

3.- Traduí'm ara el problema al llenguatge algebraic:

$$5x + 6 = x^2$$

4.-Resolem l'equació:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6; \quad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solució: Com l'enunciat diu "nombre natural" el nombre buscat és el 6.

5.- *Comprobació:* En efecte $5 \cdot 6 + 6 = 36 = 6^2$.

Activitats proposades

15. Quin nombre multiplicat per 3 és 40 unitats menor que el seu quadrat?
16. Calcula tres nombres consecutius tals que la suma dels seus quadrats siga 365.
17. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu doble és 85. Quin és el nombre?
18. Un triangle isòsceles té un perímetre de 20 cm i la base mesura 4 cm, calcula els costats del triangle i la seua àrea.

3.2. Resolució de problemes mitjançant sistemes d'equacions

Per a resoldre problemes per mitjà de sistemes d'equacions, primer haurem de passar a llenguatge algebraic l'enunciat del problema i després resoldre'l seguint els passos següents:

- 1.- Comprendre l'enunciat
- 2.- Identificar les incògnites
- 3.- Traduir l'enunciat al llenguatge algebraic
- 4.- Plantejar el sistema i resoldre'l
- 5.- Comprovar la solució obtinguda

Activitats resoltes

Resoldrem el problema següent:

- *La suma de les edats d'un pare i el seu fill és 39 i la seua diferència 25. Quina és l'edat de cada un?*

Una vegada comprés l'enunciat, identifiquem les incògnites que, en aquest cas, són l'edat del pare i el fill

2.- Edat del pare = x

Edat del fill = y

3.-Passem l'enunciat a llenguatge algebraic:

La suma de les seues edats és 39:

$$x + y = 39$$

I la seua diferència 25:

$$x - y = 25$$

4.- Plantegem el sistema i el resollem pel mètode que ens resulte més senzill. En aquest cas, el fem per reducció:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow{\text{sumem}} 2x = 64 \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7.$$

Solució: El pare té 32 anys i el fill té 7 anys.

5.-Comprovació: En efecte, la suma de les edats és $32 + 7 = 39$ i la diferència és $32 - 7 = 25$.

Activitats proposades

19. La suma de les edats de Raquel i Lluís són 65 anys. L'edat de Lluís més quatre vegades l'edat de Raquel és igual a 104. Quina edat tenen cada un?
20. La suma de les edats de Maria i Albert és 32 anys. D'ací a 8 anys, l'edat d'Albert serà dues vegades l'edat de Maria. Quina edat té cada un en l'actualitat?
21. Troba dos nombres la diferència dels quals siga 24 i la seua suma siga 123.

CURIOSITATS. REVISTA

Obtenció de la fórmula per a resoldre equacions de segon grau.

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ amb } a \neq 0$$

↓

$$ax^2 + bx = -c$$

↓ Multipliquem per $4a$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

↓ Sumem b^2

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

↓ Completem quadrats

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

↓ Calculem l'arrel quadrada

$$2ax + b =$$

↓ Aïllem la x

$$2ax =$$

↓



Emmy Noether va ser una matemàtica alemanya d'origen jueu els treballs del qual en Àlgebra van permetre resoldre el problema de la conservació de l'energia.

Tres equacions de segon grau interessants

$$x^2 = 2$$

Aquesta equació ens apareix al aplicar el Teorema de Pitàgores a un triangle rectangle isòsceles de costats iguals a 1, o al calcular la diagonal d'un quadrat de costat 1. La seua solució és la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Té d'interessant que es demostra que la dita solució NO és un nombre racional, un nombre que puga escriure's com a quocient de dos nombres enters.

$$x + 1 = x^2$$

També es pot escriure com:

que és una proporció, on x pren el valor

que és el nombre d'or, altre

nombre irracional.

$$x^2 = -1$$

La tercera equació no té solució real, cap nombre real al elevar-lo al quadrat pot donar un nombre negatiu, però si ampliem el camp real amb la seua arrel, i , resulta que ja totes les equacions de segon grau tenen solució, i als nombres $a + b \cdot i$ se'ls anomena **nombres complexos**.

RESUM

Equació de segon grau	És una equació algebraica en què la major potència de la incògnita és 2. Té la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ on a, b i c són nombres reals, amb $a \neq 0$.	$-3x^2 + 7x - 8 = 0$
Resolució d'equacions de 2n grau completes	S'usa la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0:$ $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$ $= \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3, x_2 = 2$
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$
Nombre de solucions d'una equació de 2n grau	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, té dues solucions reals i distintes Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, té una solució doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'equació no té solució	$x^2 - 4x - 5 = 0: \Delta = 36 > 0$, té dues solucions 5 i -1. $x^2 - 2x + 1 = 0: \Delta = 0$, té una arrel doble: $x = 1$. $x^2 + 3x + 8 = 0: \Delta = -23$. No té solució real
Resolució d'equacions de 2n grau incompletes	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, aïllem la incògnita: $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$ Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0: x = 0$ i $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 18 = 0: x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$ $3x^2 - 15x = 0 \Rightarrow 3x(x - 5) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 5$.
Suma i producte d'arrels	$x_1 x_2 = \frac{c}{a}; x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 3$
Sistema d'equacions lineals	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$
Classificació	Compatible determinat: Una única solució, el punt d'intersecció. Les rectes són secants : $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ Compatible indeterminat: Infinites solucions, per la qual cosa les rectes són coincidentes : $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 6 \end{cases}$ Incompatible: No té solució, les rectes són paral·leles : $\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x - 6y = 2 \end{cases}$	
Mètodes de resolució	Substitució: aïllar una incògnita i substituir en l'altra equació. Igalació: aïllar la mateixa incògnita de les dues equacions. Reducció: sumar les dues equacions, multiplicant-les per nombres adequats.	

EXERCICIS I PROBLEMES**Equacions de segon grau**

1. Resol les següents equacions de 2n grau

a) $-x^2 - 6x - 8 = 0$

b) $x(-1 + x) = 6$

c) $7x^2 = 70x$

d) $2(x + 3) - x(2x + 1) = 5$

e) $5(2x - 1) + x(x - 1) = 5$

f) $12(x^2 - 1) - 6(2 + x) = -$

18

g) $(2x + 3) \cdot (x - 1) = -x - 3$

h) $x \cdot (x + 2) = 168$

i) $6(2x^2 - 3x + 1) - x(2x - 1) = -1$

2. Resol les següents equacions de 2n grau amb denominadors:

a) $\frac{x^2-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 10$

b) $\frac{x^2-3}{3} + \frac{x^2-x+1}{7} = 3$

c) $\frac{x^2+1}{5} + \frac{2x+6}{10} = 2$

d) $\frac{1-x^2}{2} + \frac{3x-1}{3} = \frac{1}{3}$

e) $\frac{2x^2-8}{5} - \frac{3x-9}{10} = x - 1$

f) $\frac{2x+3x^2}{5} - \frac{3x-6}{10} = 1$

3. Resol mentalment les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 - 7x + 10 = 0$

b) $x(-1 + x) = 0$

c) $2x^2 = 50$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$

e) $x^2 + 3x - 10 = 0$

f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$

h) $x^2 - x - 6 = 0$

i) $x^2 + x - 6 = 0$

4. Factoriza les equacions del problema anterior. Així, si les solucions són 2 i 5, escriu:

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x - 2) \cdot (x - 5) = 0.$$

Observa que si el coeficient de x^2 fóra diferent d'1 els factors han d'estar multiplicats pel dit coeficient.

5. Quan el coeficient b és parell ($b = 2B$), pots simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2 - ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - ac}}{a}$$

Així per a resoldre $x^2 - 6x + 8 = 0$ seria $x = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1$, per tant les seues solucions són 2 i 4.

Utilitza aqueixa expressió per a resoldre:

a) $x^2 - 8x - 12 = 0$

b) $x^2 - 10x + 24 = 0$

c) $x^2 + 4x + 7 = 0$

6. Resol mentalment les equacions següents, després desenrotlla les expressions i utilitza la fórmula general per a tornar a resoldre-les.

a) $(x - 2) \cdot (x - 6) = 0$

b) $(x + 1) \cdot (x - 3) = 0$

c) $(x - 9) \cdot (x - 3) = 0$

d) $(x - 1) \cdot (x + 4) = 0$

e) $(x + 7) \cdot (x - 2) = 0$

f) $(x - 4) \cdot (x + 6) = 0$

7. Determina el nombre de solucions reals que tenen les següents equacions de segon grau calculant el seu discriminant, i després resol-les.

a) $x^2 + 3x - 4 = 0$

b) $7x^2 + 12x - 4 = 0$

c) $3x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - x + 5 = 0$

e) $6x^2 - 2x - 3 = 0$

f) $5x^2 + 8x - 6 = 0$

8. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguen cap solució real. *Ajuda:* Utilitza el discriminant.

9. Escriu tres equacions de segon grau que tinguen una solució doble.

10. Escriu tres equacions de segon grau que tinguen dues solucions reals i distintes.

11. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguen solució real.

Sistemes lineals d'equacions

12. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 5y = -4 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

13. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

$$\text{a) } \begin{cases} -2x + 3y = 13 \\ 3x - 7y = -27 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 5x - 2y = -3 \\ 4x - y = 0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -8x + 3y = -5 \end{cases}$$

14. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ -x - 6y = 7 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 9x - 5y = 4 \\ -7x + 5y = -2 \end{cases}$$

15. Resol de forma gràfica els següents sistemes

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ x - 6y = 1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 9x - 5y = 13 \\ -7x + 5y = -9 \end{cases}$$

16. Resol els següents sistemes pel mètode que cregues més apropiat:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{4x-1}{3} - \frac{2y+2}{5} = -1 \\ \frac{x+3}{2} + \frac{4y-1}{3} = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{3x-1}{2} - \frac{y+3}{5} = -3 \\ 3x + y = -1 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y+2}{3} = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

17. Copia al teu quadern i completa els següents sistemes incomplets de manera que es complisca el que es demana en cada un:

Compatible indeterminat
 $y = 1$

Incompatible

La seua solució siga $x = 2$ i

a) $\begin{cases} ()x + 3y = () \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -5x + y = 2 \\ ()x + y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y = () \\ ()x + y = 7 \end{cases}$

Incompatible
indeterminat

La seua solució siga $x = -1$ i $y = 1$

Compatible

$$d) \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 4x + 0y = 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 3x + 0y = -1 \\ 0x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 0x + 6y = 0 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$$

18. Escriu tres sistemes lineals que siguen incompatibles.
 19. Escriu tres sistemes lineals que siguen compatibles indeterminats.
 20. Escriu tres sistemes lineals que siguen compatibles determinats.
 21. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació i comprova la solució gràficament. De quin tipus és cada sistema?

$$a) \begin{cases} -2x + 6y = 13 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y = -3 \\ 4x - 4y = -12 \end{cases} \quad c) \begin{cases} x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$$

Problemes

22. En una botiga lloguen bicicletes i tricicles. Si tenen 51 vehicles amb un total de 133 rodes, quantes bicicletes i quants tricicles tenen?
23. Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 15 li falten 100 unitats per a completar el seu quadrat?
24. Descompon 8 en dos factors la suma del qual siga 6
25. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu doble és 85. Quin nombre és?
26. La suma dels quadrats de dos nombres imparells consecutius és 394. Determina els dits nombres.
27. Van carregats un ase i un mul. L'ase es queixava del pes que portava damunt. El mul li va contestar: Si jo portara un dels teus sacs, portaria el doble de càrrega que tu, però si tu prens un dels meus, els dos portarem la mateixa càrrega. Quants sacs porta cada un?
28. Quin nombre multiplicat per 3 és 40 unitats menor que el seu quadrat?
29. Calcula tres nombres consecutius la suma de quadrats del qual és 365
30. D'ací a 11 anys, l'edat de Mari serà la meitat del quadrat de l'edat que tenia fa 13 anys. Quina edat té Mari?
31. Dos nombres naturals es diferencien en 2 unitats i la suma dels seus quadrats és 580. Quins són els dits nombres?
32. La suma de dos nombres és 5 i el seu producte és -84 . De quins nombres es tracta?
33. Maria vol formar safates d'un quilogram amb massapans i mantegades. Si les mantegades li costen a 5 euros el quilo i els massapans a 7 euros el quilo, i vol que el preu de cada safata siga de 6 euros, quina quantitat haurà de posar de cada producte? Si vol formar 25 safates, Quina quantitat de mantegades i de massapans necessitarà?
34. Determina els catets d'un triangle rectangle la suma dels quals és 7 cm i la hipotenusa del dit triangle mesura 5 cm.
35. El producte de dos nombres és 4 i la suma dels seus quadrats 17. Calcula els dits nombres



36. La suma de dos nombres és 20. El doble del primer més el triple del segon és 45. De quins nombres es tracta?
37. A un garatge hi ha 30 vehicles entre cotxes i motos. Si en total hi ha 100 rodes, quants cotxes i motos hi ha al garatge?
38. L'edat actual de Pere és el doble de la de Raquel. D'ací a 10 anys, les seues edats sumaran 65. Quants anys tenen actualment Pere i Raquel?
39. A la meua classe hi ha 35 persones. Ens han regalat a cada xica 2 bolígrafs i a cada xic 1 quadern. Si en total hi havia 55 regals. Quants xics i xiques som a classe?
40. Entre el meu iaio i el meu germà tenen 56 anys. Si el meu iaio té 50 anys més que el meu germà, quina edat té cada un?
41. Dos entrepans i un refresc costen 5€. Tres entrepans i dos refrescos costen 8€. Quin és el preu de l'entrepà i el refresc?
42. En una granja hi ha pollastres i vaques. Si es compten els caps, són 50. Si es compten les potes, són 134. Quants pollastres i vaques hi ha en la granja?
43. Un rectangle té un perímetre de 172 metres. Si el llarg és 22 metres major que l'ample, quines són les dimensions del rectangle?
44. A una bossa hi ha monedes d'1€ i 2€. Si en total hi ha 40 monedes i 53€, quantes monedes de cada valor hi ha a la bossa?
45. A una baralla entre aranyes i vespes, hi ha 70 caps i 488 potes. Sabent que una aranya té 8 potes i una vespa 6, quantes mosques i aranyes hi ha a la baralla?
46. Una classe té 32 estudiants, i el nombre d'alumnes és triple al d'alumnes, quants xics i xiques hi ha?
47. Violant té 6 anys més que el seu germà Pablo, i sa mare té 49 anys. D'ací a 2 anys l'edat de la mare serà doble de la suma de les edats dels seus fills, Quines edats té?



AUTOAVALUACIÓ

1. Les solucions de l'equació $3(x^2 - 1) + 2(x^2 - 2x) = 9$ són:

a) $x = 2$ i $x = 1$ b) $x = 1$ i $x = -3$ c) $x = 1$ i $x = -2/3$ d) $x = 2$ i $x = -6/5$

2. Les solucions de l'equació $156 = x(x - 1)$ són:

a) $x = 11$ i $x = -13$ b) $x = 13$ i $x = -12$ c) $x = 10$ i $x = 14$ d) $x = -12$ i $x = -11$

3. Les solucions de l'equació són:

a) $x = 2$ i $x = 2/3$ b) $x = 1/3$ i $x = 4$ c) $x = 1$ i $x = 4/3$ d) $x = 5/3$ i $x = 3$

4. Les solucions de l'equació $(x - 14)^2 + x^2 = (x + 2)^2$ són:

a) $x = 24$ i $x = 8$ b) $x = 21$ i $x = 3$ c) $x = 5$ i $x = 19$ d) $x = 23$ i $x = 2$

5. Les solucions de l'equació $2(x + 2) - x(2 - x) = 0$ són:

a) Infinites b) $x = 9$ i $x = 5$ c) no té solució d) $x = 1$ i $x = 4$

6. Les rectes que formen el sistema són:

a) Secants b) Paral·leles c) Coincidents d) S'encreuen

7. La solució del sistema és:

a) $x = 2$ i $y = 1$ b) $x = 1$ i $y = 1$ c) $x = 3$ i $y = 2$ d) No té solució

8. La solució del sistema és:

a) $x = 4$ i $y = 2$ b) $x = 3$ i $y = 3$ c) $x = 2$ i $y = -1$ d) $x = 5$ i $y = 1$

9. A una granja, entre pollastres i porcs hi ha 27 animals i 76 potes. Quants pollastres i porcs hi ha a la granja?

a) 16 pollastres i 11 porcs b) 15 pollastres i 12 porcs c) 13 pollastres i 14 porcs

10. Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 15, li falten 100 unitats per a arribar al seu quadrat?

a) 6 anys b) 7 anys c) 5 anys d) 8 anys