

Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades:

# 3º A d'ESO

## Capítol 6:

### Proporcionalitat

#### Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-039136

Fecha y hora de registro: 2014-04-07 18:20:55.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa



Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Más información en <http://www.dmrighs.com>



[www.apuntesmareaverde.org.es](http://www.apuntesmareaverde.org.es)



**Autora: Nieves Zuasti**

**Revisor: Javier Rodrigo**

**Il·lustracions: Banc d'imatges d'INTEF**

**Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay**

## Índex

### 1. PROPORCIONALITAT DIRECTA

- 1.1. MAGNITUDS DIRECTAMENT PROPORCIONALS
- 1.2. REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA
- 1.3. REGLA DE TRES COMPOSTA DIRECTA
- 1.4. PERCENTATGES
- 1.5. INCREMENT PERCENTUAL
- 1.6. DESCOMPTE PERCENTUAL
- 1.7. ESCALES

### 2. PROPORCIONALITAT INVERSA

- 2.1. MAGNITUDS INVERSAMENT PROPORCIONALS
- 2.2. REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA
- 2.3. REGLA DE TRES COMPOSTA INVERSA

### 3. REPARTIMENTS PROPORCIONALS

- 3.1. REPARTIMENT PROPORCIONAL DIRECTE
- 3.2. REPARTIMENT PROPORCIONAL INVERS
- 3.3. MESCLES I ALIATGES

### 4. INTERÉS SIMPLE

- 4.1. CÀLCUL D'INTERÉS SIMPLE
- 4.2. INTERÉS COMPOST

## Resum

La proporcionalitat és una realitat amb què convivim al nostre voltant. Per a comprendre-la i utilitzar-la correctament, necessitem conèixer les seues regles.

Reconeixerem la proporcionalitat directa o inversa, simple i composta, i realitzarem exercicis i problemes d'aplicació.

En multitud d'ocasions hem d'efectuar repartiments proporcionals, directes o inversos: premis de loteria, herències, mescles, aliatges...

El tant per cent i l'interés és un concepte que apareix constantment als Mitjans de comunicació i en la nostra pròpia economia. En aquest capítol farem una primera aproximació a la denominada "economia financera"



## 1. PROPORCIONALITAT DIRECTA

### 1.1. Magnituds directament proporcionals

*Recorda que:*

Dues magnituds són **directament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un número, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix número.

*Exemple:*

- Si dues caixes contenen 12 bombons, deu caixes (iguals a les primeres) contindran seixanta bombons.

$$2 \cdot 6 = 12 \quad 10 \cdot 6 = 60$$

La **raó de proporcionalitat directa**  $k$  s'obté mitjançant el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = k$$

*Exemple:*

- A l'exemple anterior la raó de proporcionalitat és:  $\frac{12}{2} = \frac{60}{10} = 6$

*Exemple:*

- Calcula la raó de proporcionalitat, copia en el teu quadern i completa la taula de proporcionalitat directa següent:

<b>Magnitud A</b>	18	2,4	60	2,8	0,20
<b>Magnitud B</b>	4,5	0,6	15	0,7	0,05

La raó de proporcionalitat és  $k = \frac{18}{4,5} = 4$ . Per tant tots els valors de la magnitud B són quatre vegades menors que els de la magnitud A.

### 1.2. Regla de tres simple directa

*Recorda que:*

El quart terme d'una proporció directa entre dues magnituds es pot calcular mitjançant el procediment denominat "**regla de tres**"

*Exemple:*

- Quinze paquets pesen 330 kg, quants kg pesen 6 paquets?

$$\begin{array}{cc} 15 \text{ paquets} & 330 \text{ kg} \\ 6 \text{ paquets} & x \text{ kg} \end{array}$$

$$\frac{15}{330} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{330 \cdot 6}{15} = 132 \text{ kg}$$

## 1.3. Regla de tres composta directa

Una proporció en què intervenen més de dues magnituds es denomina **proporció composta**.

Per a calcular el valor desconegut d'una de les seues magnituds s'utilitza la "**regla de tres composta**".

**Exemple:**

- Nou persones han gastat en transport 630 € en 20 dies. Quant gastaran 24 persones en 8 dies realitzant el mateix recorregut?

Observem que les tres magnituds són directament proporcionals.

9 persones                      630 €                      20 dies

24 persones                      x €                      8 dies

$$\frac{630}{x} = \frac{20}{8} = \frac{9}{24} \Rightarrow x = \frac{630 \cdot 24 \cdot 8}{9 \cdot 20} = 672 \text{ €}$$

## 1.4. Percentatges

El percentatge o tant per cent és la raó de proporcionalitat de major ús en la vida quotidiana.

El **tant per cent** és una raó amb denominador 100.

**Exemple:**

- $24 \% = \frac{24}{100}$

Els percentatges són proporcions directes en què es pot aplicar la regla de tres.

**Exemple:**

- La població de Robles era en 2012 de 5680 habitants. En 2013 s'ha incrementat en un 5 %. Quina és la seua població a final de 2013?

El 5 % de 5680 és  $\frac{5 \cdot 5680}{100} = 284$  habitants. La població s'ha incrementat en 284 habitants, doncs al final de 2013 serà de:  $5680 + 284 = 5964$  habitants.

## Activitats proposades

1. Estima quantes persones caben de peu en un metre quadrat. Hi ha hagut una festa i s'ha omplert completament un local de  $260 \text{ m}^2$ , quantes persones estimes que han anat a aqueixa festa?
2. En una recepta ens diuen que per a fer una mermelada de maduixa necessitem un quilogram de sucre per cada dos quilograms de maduixes. Volem fer 5 quilograms de mermelada, quants quilograms de sucre i quants de maduixes hem de posar?
3. L'altura d'un arbre és proporcional a la seua ombra ( a una mateixa hora )Un. arbre que mesura 1,2 m té una ombra de 2,1 m. Quina altura tindrà un arbre l'ombra del qual mesura 4,2 m?

## 1.5. Increment percentual

### Exemple:

L'exemple anterior pot resoldre's mitjançant **increment percentual**:  $100 + 5 = 105\%$

- El 105 % de 5680 és  $\frac{105 \cdot 5680}{100} = 5964$  habitants

## 1.6. Descompte percentual

- A les rebaixes a tots els articles a la venda els apliquen un 20 % de descompte. Calcula el preu dels que apareixen a la taula:

<b>Preu sense descompte</b>	74 €	105 €	22 €	48 €
<b>Preu en rebaixes</b>	59,20 €	84 €	17,6 €	38,4 €

Ja que ens descompten el 20 %, pagarem el 80 %. Per tant:  $\frac{80}{100} = 0,8$  és la raó directa de proporcionalitat que aplicarem als preus sense descompte per a calcular el preu rebaixat.

## Activitats proposades

3. Còpia al teu quadern i completa la taula de proporció directa. Calcula la raó de proporcionalitat.

<b>Litres</b>	16	4,5		1		50
<b>Euros</b>	36		8,10		10	

4. Hem gastat 72 litres de gasolina per a recórrer 960 km. Quants litres necessitarem per a una distància de 1500 km?
5. El meu cotxe gasta 6 litres de gasolina cada 100 km, quants litres gastarà en un viatge de 1250 km?
6. Un llibre de 420 pàgines pesa 200 g. Quant pesarà un llibre de la mateixa col·lecció de 300 pàgines?
7. Sis persones realitzen un viatge de huit dies i paguen en total 40800 €. Quant pagaran 15 persones si el seu viatge dura 5 dies?



8. Calcula el preu final d'un llavaplatos que costava 430 € més un 21 % d'IVA, a què se li ha aplicat un descompte sobre el cost total del 15 %.

9. Calcula els termes que falten per a completar les proporcions:

$$\frac{24}{100} = \frac{30}{x}$$

$$b) \frac{x}{80} = \frac{46}{12}$$

$$c) \frac{3,6}{12,8} = \frac{x}{60}$$

10. Còpia en el teu quadern i completa:

- D'una factura de 127 € he pagat 111 €. M'han aplicat un ..... % de descompte
- M'han descomptat el 12 % d'una factura de ..... € i he pagat 365 €.
- Per pagar al comptat un moble m'han descomptat el 15 % i m'he estalviat 100 €. Quin era el preu del moble sense descompte?

11. Dos pantalons ens van costar 32 €, quant pagarem per 5 pantalons?



## 1.7. Escales

En plans i mapes trobem anotades en la seua part inferior l'escala a què estan dibuixats.

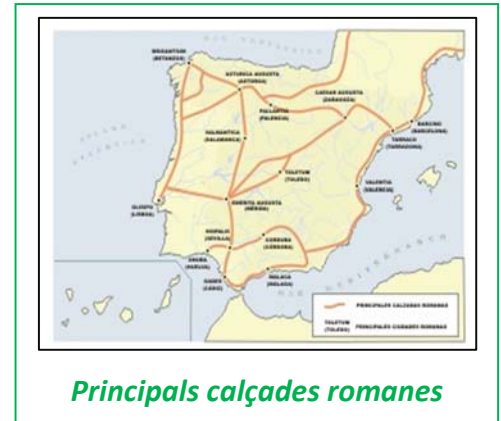
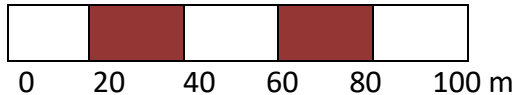
**L'escala** és la proporció entre les mesures del dibuix i les mesures en la realitat.

**Exemple:**

- Si una certa escala s'expressa de la forma 1 : 20000 significa que 1 cm del pla correspon a 20000 cm = 200 m en la realitat.

Les escales també es representen en forma gràfica, mitjançant una barra dividida en segments d'1 cm de longitud

**Exemple:**



**Principals calçades romanes**



**Escalímetre**

Aquesta escala identifica cada centímetre del mapa amb 20 m en la realitat és a dir 1 : 2000.

Un instrument senzill per a realitzar treballs a escala és el *pantògraf* que facilita copiar una imatge o reproduir-la a escala.

El pantògraf és un paral·lelogram articulat que, en variar la distància entre els punts d'articulació, permet obtindre diferents grandàries de dibuix sobre un model donat.

## Activitats proposades

- La distància real entre dos pobles és 18,5 km. Si en el mapa estan a 10 cm de distància. A quina escala està dibuixat?
- Quina altura té un edifici si la seua maqueta construïda a escala 1:300 presenta una altura de 12 cm?
- Dibuixa l'escala gràfica corresponent a l'escala 1 : 60000.
- Les dimensions d'una superfície rectangular en el pla són 6 cm i 14 cm. Si està dibuixat a escala 1 : 40, calcula les seues mesures reals.



## 2. PROPORCIONALITAT INVERSA

### 2.1. Magnituds inversament proporcionals

*Recorda que:*

Dues magnituds són **inversament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un número, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix número.

*Exemple:*

- Quan un automòbil va a 90 km/h, tarda quatre hores a arribar al seu destí. Si fóra a 120 km/h tardaria 3 hores a fer el mateix recorregut.

$$90 \cdot 4 = 120 \cdot 3$$

La velocitat i el temps són magnituds inversament proporcionals.

La **raó de proporcionalitat inversa**  $k'$  és el producte de cada parell de magnituds:  $k' = a \cdot b = a' \cdot b'$

*Exemple:*

- Copia la taula al teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat inversa i completa la taula de proporcionalitat inversa:

<b>a</b>	18	150	1,5	3600	100
<b>b</b>	50	6	600	0,25	9

$k' = 18 \cdot 50 = 900$ . Comprova que totes les columnes donen aquest resultat.

### 2.2. Regla de tres simple inversa

Per a calcular el quart terme entre dues magnituds inversament proporcionals apliquem la regla de tres inversa.

*Exemple:*

- Quatre persones realitzen un treball en 18 dies. Quantes persones necessitarem per a realitzar el mateix treball en 8 dies?

4 persones — 18 dies

x persones — 8 dies

$$k' = 4 \cdot 18 = 8 \cdot x \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 18}{8} = 9 \text{ persones.}$$

### 2.3. Regla de tres composta inversa

En la regla de tres composta **inversa**, intervenen diverses magnituds inversament proporcionals entre si.

## Exemple:

- Amb una quantitat de pinso podem donar de menjar a 48 animals durant 30 dies amb una ració de 1,2 kg per a cada u. Quants dies podrem alimentar a 60 animals si la ració és de 800 g?

48 animals    — 30 dies    — 1,2 kg

60 animals    — x dies    — 0,800 kg

Les tres magnituds són inversament proporcionals entre si.

Per tant  $k' = 48 \cdot 30 \cdot 1,2 = 1728 \Rightarrow x = \frac{48 \cdot 30 \cdot 1,2}{60 \cdot 0,800} = 36$  dies.

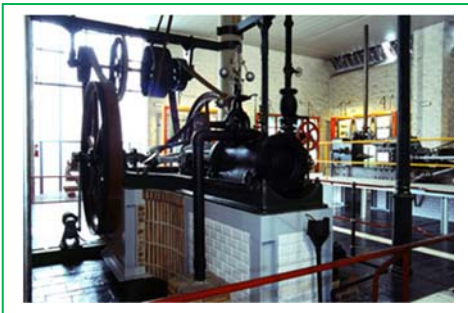
## Activitats proposades

16. Còpia al teu quadern la taula següent, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat inversa:

<b>Magnitud A</b>	36	0,09		12	
<b>Magnitud B</b>	0,25		6		72

17. En tallar una quantitat de fusta hem aconseguit 6 panells de 2,25 m de llarg. Quants panells aconseguirem si ara tenen 1,5 m de llarg?

18. Per a omplir un depòsit s'obrin tres aixetes que llancen 2 litres per minut cada un i tarden 6 hores. Quant temps tardaran 4 aixetes semblants que llancen 5 litres per minut cada un?



19. Tres màquines fabriquen 1200 peces funcionant 5 hores diàries. Quantes màquines s'han de posar a funcionar per a aconseguir 6000 peces durant 9 hores diàries?



20. En la construcció d'un pont de 900 m s'han utilitzat 250 bigues, però l'enginyer no està molt segur i decideix reforçar l'obra afegint 75 bigues més. Si les bigues es col·loquen uniformement al llarg de tot el pont, a quina distància es col·locaran les bigues?
21. En un hort ecològic s'utilitzen 3000 kg d'un tipus d'adob d'origen animal que se sap que té un 10% de nitrats. Es canvia el tipus d'adob, que ara té un 15 % de nitrats, quants quilograms es necessitaran del nou adob perquè les plantes reben la mateixa quantitat de nitrats?
22. Aqueix mateix hort necessita 1200 caixes per a envasar les seues mandarines en caixes d'un quilogram. Quantes caixes necessitaria per a envasar-les en caixes de mig quilogram? I per a envasar-les en caixes de 2 quilograms?



## 3. REPARTIMENTS PROPORCIONALS

Quan es realitza un repartiment en parts desiguals s'ha d'establir prèviament si es tracta d'un repartiment proporcional directe o invers.

### 3.1. Repartiment proporcional directe

En un repartiment proporcional directe li correspondrà més a qui té més parts.

#### Activitat resolta

- Tres amics han de repartir-se els 300 € que han guanyat en una competició d'acord amb els punts que cada un ha obtingut. El primer va obtindre 7 punts, el segon 5 i el tercer 3 punts.

El repartiment directament proporcional s'inicia sumant els punts:  $7 + 5 + 3 = 15$  punts.

Calculem el premi per punt:  $300 : 15 = 20$  €.

El primer obtindrà  $20 \cdot 7 = 140$  €.

El segon:  $20 \cdot 5 = 100$  €.

El tercer:  $20 \cdot 3 = 60$  €.

La suma de les tres quantitats és 300 €, la quantitat total a repartir.

Com es tracta d'una proporció, s'ha d'establir la regla següent:

Siga  $N$  (en l'exemple anterior 300) la quantitat a repartir entre quatre persones, a qui els correspondrà  $A, B, C, D$  de manera que  $N = A + B + C + D$ . Aquestes quantitats són proporcionals a la seua participació en el repartiment:  $a, b, c, d$ .

$a + b + c + d = n$  és el nombre total de parts en què ha de distribuir-se  $N$ .

$N : n = k$  que és la quantitat que correspon a cada part. En l'exemple anterior:  $k = 300 : 15 = 20$ .

El repartiment finalitza multiplicant  $k$  per  $a, b, c$  i  $d$ , obtenint-se així les quantitats corresponents  $A, B, C$  i  $D$ .

### 3.2. Repartiment proporcional invers

En un repartiment proporcional invers rep més qui menys parts té.

Siga  $N$  la quantitat a repartir i  $a, b$  i  $c$  les parts. En ser una proporció inversa, el repartiment es realitza als seus inversos  $1/a, 1/b, 1/c$ .

Per a calcular les parts totals, reduïm les fraccions a comú denominador, per a tindre un patró comú, i prenem els numeradors que són les parts que corresponen a cada u.

## Activitat resolta

- Repartir 3000 € de forma inversament proporcional a 12 i 20.

Calculem el total de les parts:  $1/12 + 1/20 = 5/60 + 3/60 = 8/60$ .

$$3000 : 8 = 375 \text{ € cada part.}$$

$$375 \cdot 5 = 1875 \text{ €.}$$

$$375 \cdot 3 = 1125 \text{ €.}$$

## Activitats proposades

23. Cinc persones comparteixen loteria, amb 10, 6, 12, 7 i 5 participacions respectivament. Si han obtingut un premi de 18000 €. Quant correspon a cada un?
24. En un concurs s'acumula puntuació de forma inversament proporcional al nombre d'errors. Els quatre finalistes, amb 6, 5, 2, i 1 error, han de repartir-se els 1400 punts. Quants punts rebrà cada un?
25. En el testament, el iaio estableix que vol repartir entre els seus néts 22200 €, de manera proporcional a les seues edats, 12, 15 i 18 anys, cuidant que la major quantitat siga per als néts menors. Quant rebrà cada un?
26. Tres socis han invertit 20000 €, 34000 € i 51000 € enguany en la seua empresa. Si els beneficis a repartir a final d'any ascendeixen a 31500 €, quant correspon a cada un?

## 3.3. Mescla i aliatges

Les **mescles** que estudiarem són el resultat final de combinar distintes quantitats de productes, de distintes preus.

### Activitat resolta

- Calcula el preu final del litre d'oli si mesquem 12 litres a 2,85 €/l, 5 litres a 3,02 €/l i 3 litres a 3,10 €/l.

Calculem el cost total dels distintes olis:

$$12 \cdot 2,85 + 5 \cdot 3,02 + 3 \cdot 3,10 = 58,60 \text{ €.}$$

I el nombre total de litres:  $12 + 5 + 3 = 20 \text{ l.}$

El preu del litre de mescla valdrà  $58,60 : 20 = 2,93 \text{ €/l.}$



Un **aliatge** és una mescla de metalls per a aconseguir un determinat producte final amb millors propietats o aspecte.

Els aliatges es realitzen en joieria mesclant metalls preciosos, or, plata, platí, amb coure o rodi. Segons la proporció de metall preciós, es diu que una joia té més o menys **lleï**.

La **lleï** d'un aliatge és la relació entre el pes del metall més valuós i el pes total.

## Exemple:

- Una joia de plata de 50 g de pes conté 42 g de plata pura. Quina és la seua llei?

$$\text{Llei} = \frac{\text{pesmetallpur}}{\text{pestotal}} = \frac{42}{50} = 0,84$$

Una altra forma de mesurar el grau de puresa d'una joia és el quirat.

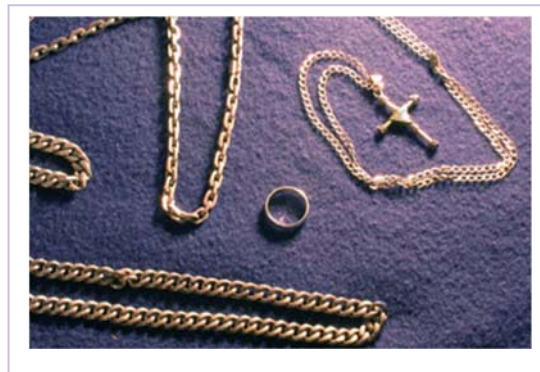
Un quirat d'un metall preciós és  $\frac{1}{24}$  de la massa total de l'aliatge.

Per a considerar una joia d'or pur ha de tindre 24 quirats.

## Exemple:

Una joia d'or de 18 quirats pesa 44 g. Quina quantitat del seu pes és d'or pur?

$$\text{Pes en or} = \frac{44 \cdot 18}{24} = 33 \text{ g.}$$



## Activitats proposades



Grans de café

27. Calcula el preu del quilo de mescla de dos tipus de café: 3,5 kg a 4,8 €/kg i 5,20 kg a 6 €/kg.

28. Quants litres de suc de pomelo de 2,40 €/l han de mesclar-se amb 4 litres de suc de taronja a 1,80 €/l per a obtindre una mescla a 2,13 €/l?

29. Calcula la llei d'una joia sabent que pesa 110 g i conté 82 g d'or pur.

30. Quants quirats, aproximadament té la joia anterior?



## 4. INTERÉS

### 4.1. Interés simple

L'**interés** és el benefici que s'obté en depositar un capital en una entitat financera a un determinat tant per cent durant un temps.

A l'**interés simple**, al capital  $C$  depositat se li aplica un tant per cent o rèdit  $r$  anualment.

El càlcul de l'interés obtingut al cap de diversos anys es realitza mitjançant la fórmula:

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$$

Si el temps que es deposita el capital són mesos o dies, l'interés es calcula dividint l'expressió anterior entre 12 mesos o 360 dies (any comercial).

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1200} \text{ temps en mesos}$$

$$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{3600} \text{ temps en dies}$$

### 4.2. Interés compost

Des d'un altre punt de vista, l'interés és el percentatge que s'aplica a un préstec al llarg d'un temps, incrementant la seua quantia a l'hora de tornar-lo.

Aquest tipus d'interés no es calcula com l'interés simple sinó que s'estableix el que s'anomena "*capitalització*".

L'**interés compost** s'aplica tant per a calcular el capital final d'una inversió, com la quantitat a tornar per a amortitzar un préstec.

Normalment els préstecs es tornen mitjançant quotes mensuals que s'han calculat a partir dels interessos generats pel préstec al tipus d'interés convingut.

La capitalització composta planteja que, a mesura que es van generant interessos, passen a formar part del capital inicial, i aqueix nou capital produirà interessos en els períodes successius.

Si es tracta d'un depòsit bancari, el capital final es calcularà seguint el procediment següent:

$C_i$ (capital inicial)	1 any	$i$ (tant per u)	$C_f = C_i \cdot (1 + i)$
$C_i \cdot (1 + i)$	2 anys	$C_i \cdot (1 + i) \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^2$
$C_i \cdot (1 + i)^2$	3 anys	$C_i \cdot (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$	$C_f = C_i \cdot (1 + i)^3$
.....	.....	.....	.....
	$n$ anys		$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$

Al cap de  $n$  anys, el capital final serà  $C_f = C_i \cdot (1 + i)^n$ .

Per a fer els càlculs pots utilitzar un “Full de càlcul”:

([http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Interes\\_compuesto.xlsx](http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Interes_compuesto.xlsx)).

És suficient que en el full de càlcul adjunt modifiques les dades de les caselles B5 on està el “Capital inicial”, casella B6 on està el “Tant per u” i de la casella B7 on apareix el número de “Anys”, i arrossegues en la columna B fins que el número final d’anys coincidisca amb la dita casella.

## Activitats resoltes

- *Depositem 5400 € al 2,25 % anual. Quants diners tindrem al cap de 28 mesos?*

Calculem l’interés simple:

$$I = \frac{5400 \cdot 2,25 \cdot 28}{1200} = 283,5 \text{ €}$$

Sumem capital i interessos:

$$5400 + 283,5 = 5683,5 \text{ €}$$

- *El capital inicial d’un depòsit ascendeix a 82000 €. El tant per cent aplicat és el 3 % a interès compost durant 5 anys. Calcula el capital final.*

$$C_f = C_i \cdot (1 + i)^n = 82000 \cdot (1 + 0,03)^5 = 82000 \cdot 1,159... = 95060 \text{ €}$$



## Activitats proposades

31. Calcula l’interés simple que produeixen 105000 € al 4,8 % durant 750 dies. (*Solució: 10500*)
32. Al 5 % d’interés compost durant 12 anys, quin serà el capital final que obtindrem en depositar 39500 €?

*Ajuda:* també pots utilitzar el full de càlcul:

([http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Interes\\_compuesto.xlsx](http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3eso/Interes_compuesto.xlsx)).

33. Quin capital cal depositar al 1,80 % durant 6 anys per a obtenir un interès simple de 777,6 €?

## CURIOSITATS. REVISTA

El terme **quirat** ve de la paraula grega "keration" (garrofa). Aquesta planta, de llavors molt uniformes, s'utilitzava per a pesar joies i gemmes a l'antiguitat.



L'escala musical és un conjunt de sons ordenats de forma ascendent o descendent.

Les escales pentatòniques són les més utilitzades en el blues, l'heavy metall i el rock



Durant segles, hòmens i dones han observat el cel utilitzant instruments que els permetien dibuixar a escala la volta celeste.

Dones com Hipatia d'Alexandria, Carolina Herschel, Maria Michell, Maria Kirch, van estudiar les constel·lacions, van catalogar estrelles i galàxies, van descobrir cometes i van deixar un enorme llegat a pesar de treballar en l'anonimat, sense reconeixement, o amb serioses dificultats per raó de ser dones.

En 2009, Any Internacional de l'Astronomia, la Unió Astronòmica Internacional i la UNESCO, van impulsar el projecte "Ella és una astrònoma" a fi de promoure la igualtat entre gèneres en aquest camp de la Ciència.



La UNED, TVE la 2 i TVE internacional han elaborat una serie titulada "**Dones en les estrelles**" que aporta una perspectiva històrica i actual de les científiques espanyoles i la seua contribució a l'astronomia.

## Proporcionalitat en àrees i volums

En augmentar el costat d'un quadrat al doble, la seua superfície queda multiplicada per 4. En multiplicar per 3 el costat, l'àrea es multiplica per 9.

En general, si fem un canvi d'escala de factor de proporcionalitat  $k$ , l'àrea té un factor de proporcionalitat  $k^2$ , i el volum  $k^3$ .



Utilitza aquesta observació per a resoldre els problemes següents:

La **Torre Eiffel de París** medeix 300 metres d'altura i pesa uns 8 milions de quilos. Està construïda de ferro. Si encarreguem un model a escala de la torre, també de ferro, que pese només un quilo, quina altura tindrà? Serà major o menor que un llapis?

Abans de començar a calcular, dóna la teua opinió.



\* En una pizzeria la pizza de 20 cm de diàmetre val 3 euros i la de 40 cm val 6 euros. Quina té millor preu?

\* Veiem en el mercat un lluç de 40 cm que pesa un quilo. Ens pareix un poc xicotet i demanem un altre un poc major, que resulta pesar 2 quilos. Quant mesurarà?

\* En un dia de fred un pare i un fill xicotet van exactament igual abrigats, Quin dels dos tindrà més fred?

## RESUM

<b>Proporcionalitat directa</b>	<p>Dues magnituds són <b>directament</b> proporcionals quan en multiplicar o dividir a la primera per un número, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix número.</p> <p>La <b>raó de proporcionalitat directa <math>k</math></b> és el valor que s'obté mitjançant el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra.</p>	<p>Per a empaperar 300 m<sup>2</sup> hem utilitzat 24 rotllos de paper, si ara la superfície és de 104 m<sup>2</sup>, necessitarem 8,32 rotllos, perquè <math>k = 300/24 = 12,5</math>, i <math>12,5 = 104/x</math>, per la qual cosa <math>x = 104/12,5 = 8,32</math>.</p>
<b>Proporcionalitat inversa</b>	<p>Dues magnituds són <b>inversament</b> proporcionals quan en multiplicar o dividir a la primera per un número, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix número.</p> <p>La <b>raó de proporcionalitat inversa <math>k'</math></b> és el producte de cada parell de magnituds: <math>k' = a \cdot b = a' \cdot b'</math></p>	<p>Dues persones pinten una vivenda en 4 dies treballant 9 h diàries. Per a pintar la mateixa vivenda, 3 persones, treballant 8 h diàries tardaran... 3 dies</p>
<b>Percentatges</b>	Raó amb denominador 100.	El 87 % de 2400 és $\frac{87 \cdot 2400}{100} = 2088$
<b>Escales</b>	L'escala és la proporció entre les mesures del dibuix i les mesures a la realitat.	A escala 1:50000, 35 cm són 17,5 km a la realitat.
<b>Repartiment proporcional directe</b>	Rep més quantitat qui més parts té.	<p>Repartir directament a 6,10 i 14, 105000 €</p> <p><math>6 + 10 + 14 = 30</math></p> <p><math>105000 : 30 = 3500</math></p> <p><math>6 \cdot 3500 = 21000</math> €</p> <p><math>10 \cdot 3500 = 35000</math> €</p> <p><math>14 \cdot 3500 = 49000</math> €</p>
<b>Repartiment proporcional invers</b>	Rep més quantitat qui menys parts té.	<p>Repartir 5670 inversament a 3,5 i 6</p> <p><math>1/3 + 1/5 + 1/6 = \frac{10+6+5}{30} = \frac{21}{30}</math></p> <p><math>5670 : 21 = 270</math>    <math>270 \cdot 10 = 2700</math></p> <p><math>270 \cdot 6 = 1620</math>    <math>270 \cdot 5 = 1350</math></p>
<b>Mescles i aliatges</b>	<p>Mesclar distintes quantitats de productes, de distintes preus.</p> <p>La <b>lleï</b> d'un <b>aliatge</b> és la relació entre el pes del metall més valuós i el pes total.</p>	<p>Una joia que pesa 245 g i conté 195 g de plata, la seua lleï és: <math>\frac{195}{245} = 0,795</math></p>
<b>Interés simple i compost</b>	L'interés és el benefici que s'obté en depositar un capital en una entitat financera a un determinat tant per cent durant un temps	<p><math>C = 3600</math>; <math>r = 4,3\%</math>; <math>t = 8</math> anys</p> <p><math>I = \frac{3600 \cdot 4,3 \cdot 8}{100} = 1238,4</math> €</p>



## EXERCICIS I PROBLEMES

1. Copia al teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat i completa la taula de proporcionalitat directa:

litres	6,25		0,75	1,4	
euros		15	2,25		4,5

2. Amb 76 € hem pagat 12,5 m de tela, quant ens costaran 22,5 m?
3. Cada setmana paguem 82 € en transport. Quant gastarem els mesos de juny i juliol?
4. Per a entapissar cinc cadires he utilitzat 2,3 m de tela, quantes cadires podré entapissar amb la peça completa de 23 m?
5. Un camió ha transportat en 3 viatges 220 sacs de creïlles de 24 kg cada u. Quants viatges seran necessaris per a transportar 550 sacs de 30 kg cada un?
6. Una edició de 350 llibres de 210 pàgines cada un arriba a un pes total de 70 kg. Quants kg pesarà una altra edició de 630 llibres de 140 pàgines cada un?
7. Sabent que la raó de proporcionalitat directa és  $\frac{A}{B} = 1,8$ , copia al teu quadern i completa la taula següent:

Magnitud A	12,6			4,14	
Magnitud B		9	0,1		2,7

8. El model de telèfon mòbil que costava 285 € + IVA està ara amb un 15 % de descompte. Quin és el seu preu rebaixat? (IVA 21 %)
9. Per retardar-se dos mesos en el pagament d'un deute de 1520 €, una persona ha de pagar un recàrrec del 12 %, quant ha de tornar en total?
10. Què tant per cent de descompte s'ha aplicat en una factura de 1820 € si finalment es van pagar 1274€?
11. En comprar un televisor he obtingut un 22 % de descompte, per la qual cosa al final he pagat 483,60€, quin era el preu del televisor sense descompte?
12. Per liquidar un deute de 3500 € abans d'allò que s'ha previst, una persona paga finalment 3080 €, quin percentatge del seu deute s'ha estalviat?
13. El preu d'un viatge s'anuncia a 907,50 € IVA inclòs. Quin era el preu sense IVA? (IVA 21 %)
14. Què increment percentual s'ha efectuat sobre un article que abans valia 38 € i ara es paga a 47,12 €?
15. Un mapa està dibuixat a escala 1:700000. La distància real entre dues ciutats és 21 km. Quina és la seua distància al mapa?
16. La distància entre Oviedo i Corunya és de 340 km. Si al mapa estan a 10 cm, quina és l'escala a què està dibuixat?

17. Interpreta la següent escala gràfica i calcula la distància en la realitat per a 21 cm.



18. Còpia al teu quadern i completa la taula següent:

Grandària al dibuix	Grandària real	Escala
24 cm llarg i 5 cm d'ample		1:25000
6 cm	15 km	
	450 m	1:30000

19. Copia al teu quadern, calcula la raó de proporcionalitat inversa i completa la taula:

<b>Magnitud A</b>	4	7,5		3,6	
<b>Magnitud B</b>		12	0,18		10

20. Quina velocitat ha de portar un automòbil per a recórrer en 4 hores una certa distància si a 80 km/h ha tardat 5 hores i 15 minuts?

21. La raó de proporcionalitat inversa entre A i B és 5,4. Copia al teu quadern i completa la taula següent:

<b>A</b>	18		9		10,8
<b>B</b>		0,03		2,7	

22. En la granja es fa la comanda de farratge per a alimentar a 240 vaques durant 9 setmanes. Si el granger ven 60 vaques, a) quantes setmanes li durarà el farratge? b) I si en compte de vendre, compra trenta vaques? c) I si decideix rebaixar la ració una quarta part amb les 240 vaques?

23. Amb dotze paquets de 3,5 kg cada un poden menjar 80 gallines diàriament. Si els paquets foren de 2 kg, quants necessitaríem per a donar de menjar a les mateixes gallines?

24. Determina si les dues magnituds són directa o inversament proporcionals i completa la taula en el teu quadern:

<b>A</b>	24	8	0,4	6		50
<b>B</b>	3	9	180		20	

25. Si la jornada laboral és de 8 hores necessitem a 15 operaris per a realitzar un treball. Si rebaixem la jornada en mitja hora diària, quants operaris seran necessaris per a realitzar el mateix treball?

26. En un magatzem es guarden reserves de menjar per a 80 persones durant 15 dies amb 3 racions diàries, quants dies duraria la mateixa menjar per a 75 persones amb 4 racions diàries?

27. Deu operaris instal·len 3600 m de tanca en 6 dies. Quants dies tardaran 12 operaris a instal·lar 5040 m de tanca?

28. En un concurs el premi de 168000 € es reparteix de forma directament proporcional als punts aconseguits. Els tres finalistes van aconseguir 120, 78 i 42 punts. Quants euros rebran cada un?
29. Repartir 336 en parts directament proporcionals a 160, 140, 120.
30. Un treball es paga a 3120 €. Tres operaris el realitzen aportant el primer 22 jornades, el segon 16 jornades i el tercer 14 jornades. Quant rebrà cada un?
31. Repartir 4350 en parts inversament proporcionals a 18, 30, 45.
32. Cinc persones comparteixen un microbús per a realitzar distints trajectes. El cost total és de 157,5 € més 20 € de suplement per servei nocturn. Els quilòmetres recorreguts per cada passatger van ser 3, 5, 7, 8 i 12 respectivament. Quant ha d'abonar cada un?
33. S'ha decidit penalitzar a les empreses que més contaminen. Per a això es reparteixen 2350000 € per a subvencionar a tres empreses que presenten un 12 %, 9 % i 15 % de grau de contaminació. Quant rebrà cada una?
34. Mesclm 3 kg d'ametles a 14 €/kg, 1,5 kg d'anous a 6 €/kg, 1,75 kg d'anacards a 18 €/kg. Calcula el preu final del paquet de 250 g de mescla de fruits secs.
35. Calcula el preu del litre de suc que s'aconsegueix mesclant 8 litres de suc de pinya a 2,5 €/l, 15 litres de suc de taronja a 1,6 €/l i 5 litres de suc de raïm a 1,2 €/l. A quant ha de vendre's una botella de litre i mig si se li aplica un augment del 40 % sobre el preu de cost?
36. Per a aconseguir un tipus de pintura es mesclen tres productes 5 kg del producte X a 18 €/kg, 19 kg del producte Y a 4,2 €/kg i 12 kg del producte Z a 8 €/kg. Calcula el preu del kg de mescla.
37. Un lingot d'or pesa 340 g i conté 280,5 g d'or pur. Quina és la seua llei?
38. Quants grams d'or conté una joia que s'ha format amb un aliatge de 60 g de 0,950 de llei i 20 g de 0,750 de llei?
39. Quin capital cal depositar al 3,5 % de rèdit en 5 anys per a obtindre un interès simple de 810 €?
40. Quin és el capital final que es rebrà per depositar 25400 € al 1,4 % en 10 anys?
41. Quants mesos ha de depositar-se un capital de 74500 € al 3 % per a obtindre un interès de 2980 €?
42. Al 3 % d'interès compost durant 5 anys un capital s'ha convertit en 69556,44 €. De quin capital es tracta?

## AUTOAVALUACIÓ

1. Els valors que completen la taula de proporcionalitat directa són:

<b>A</b>	8	0,75		4,5	100
<b>B</b>		15	6		

- a) 160; 0,3; 90; 2000      b) 16, 3, 90, 200      c) 160, 3, 9, 20

2. Amb 450 € paguem els gastos de gas durant 8 mesos. En 30 mesos pagarem:

- a) 1850 €      b) 1875 €      c) 1687,5 €

3. Un article que costava 1600 € s'ha rebaixat a 1400 €. El percentatge de rebaixa aplicat és:

- a) 12,5 %      b) 14 %      c) 15,625 %      d) 16,25 %

4. Per a envasar 360 litres d'aigua, quantes botelles necessitarem si volem utilitzar envasos de tres quarts de litre?

- a) 440 botelles      b) 280 botelles      c) 480 botelles      d) 360 botelles

5. Tres agricultors es reparteixen els quilograms de la collita de forma proporcional a la grandària de les seues parcel·les. La major, que mesura 15 ha rep 24 tones, la segona és de 10 ha i la tercera de 8 ha rebran:

- a) 16 t i 5 t      b) 12,8 t i 16 t      c) 16 t i 12,8 t      d) 16 t i 11 t

6. L'escala a què s'ha dibuixat un mapa en què 3,4 cm equivalen a 1,02 km és :

- a) 1:34000      b) 1:3000      c) 1:30000      d) 1:300

7. Amb 4 rotllos de paper de 5 m de llarg, puc forrar 32 llibres. Quants rotllos necessitarem per a forrar 16 llibres si ara els rotllos de paper són de 2 m de llarg?

- a) 3 rotllos      b) 5 rotllos      c) 4 rotllos      d) 2 rotllos

8. El preu final del kg de mescla de 5 kg de farina classe A, a 1,2 €/kg, 2,8 kg classe B a 0,85 €/kg i 4 kg classe C a 1 €/kg és:

- a) 1,12 €      b) 0,98 €      c) 1,03 €      d) 1,5 €

9. La llei d'un aliatge és 0,855. Si el pes de la joia és 304 g, la quantitat de metall preciós és:

- a) 259,92 g      b) 255,4 g      c) 248,9 g      d) 306 g

10. A 2% d'interés compost, durant 6 anys, 14500 s'hauran € convertit en :

- a) 16225,35 €      b) 16329,35 €      c) 15632,35 €      d) 14550 €