Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades:

3r A d'ESO
Capítol 10:
Funcions i gràfiques

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Gallegos Fernández

Revisors: Concha Fidalgo i Javier Brihuega

Il·lustracions: José Gallegos Fernández

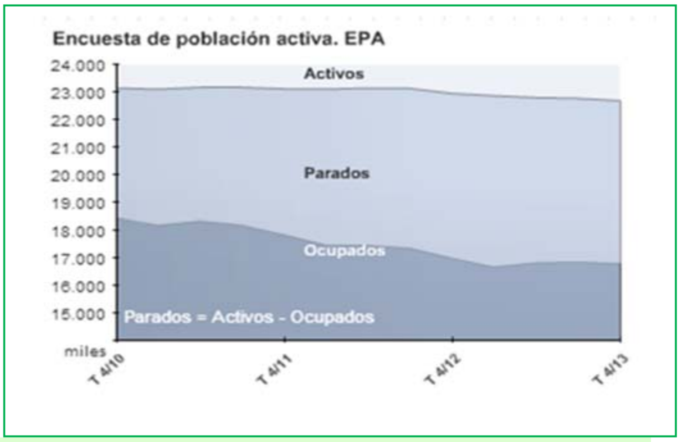
Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

Funcions. 3t A d'ESO

Índex

Resum

El concepte de funció és prou abstracte, la qual cosa fa complicada la seua definició i comprensió. No obstant això, les seues aplicacions són múltiples i molt útils, la qual cosa les fa molt importants.
Per exemple, les funcions serveixen per a poder explicar molts fenòmens que ocorren en camps tan diversos com la Física, l'Economia o la Sociologia.



A pesar de les dificultats, algunes característiques que posseeixen les funcions s'entenen fàcilment quan es representen gràficament, per resultar aleshores molt intuïtives, i això és prou per a poder analitzar i resoldre moltes qüestions. Per exemple, si observem la gràfica anterior no és difícil interpretar si la desocupació ha pujat o si ha baixat en el quart trimestre entre dos anys consecutius, o globalment al llarg del període complet estudiat, o calcular el dit increment/disminució o estudiar en quin any va haver-hi més persones ocupades o menys persones actives...

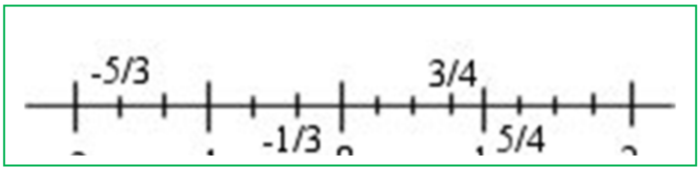
Textos Marea Verde

1. SISTEMES DE REPRESENTACIÓ AL PLA

1.1. Eixos de coordenades o cartesians.

Recorda que:

Quan volem representar gràficament un nombre, normalment els dibuixem sobre una recta, anomenada *recta numèrica*, a la qual establim un punt de referència, que és el 0, a partir del qual tracem els nombres positius (cap a la dreta) i els negatius (cap a l'esquerra).



Doncs bé, si estem treballant amb una única variable que pren valors numèrics i els volem representar, ho farem igualment sobre dita recta.

És important fer notar que, com tenim una única variable, necessitem una única recta i, per tant, estem treballant amb una única dimensió (longitud).

Al pla:

Ara bé, si treballem amb objectes de dues dimensions, al pla, necessitem dos valors per a referir-nos a ells, ja que estan determinats per la seua longitud i la seua amplària, que no tenen per què ser iguals i que segueixen direccions diferents.

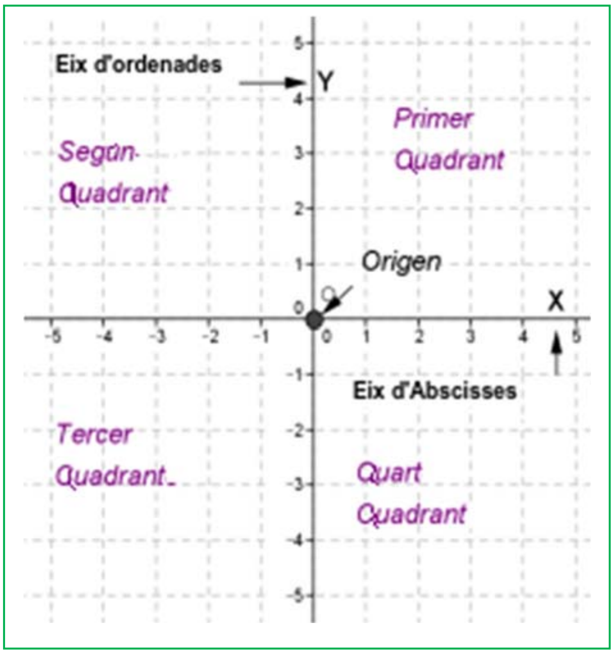
Exemple:

- En un mapa, per a poder situar un punt qualsevol (per exemple, una ciutat), tenim una referència a partir de la qual prendre les mesures: el paral·lel de l'Equador i el meridià de Greenwich. Ambdós es tallen en un punt, que és l'origen d'aquest sistema de referència:

De la mateixa manera, si tenim dos variables *que estan relacionades d'alguna manera,* que prenen valors numèrics i els volem dibuixar, haurem d'utilitzar dues rectes o eixos diferents (cada un per a les dades corresponents a una variable) i que siguen secants, és a dir, es tallen en un punt (sense el qual no es podria establir la relació entre ambdues).

Si les rectes es tallen de forma perpendicular, és més senzill establir la connexió entre valors, i les mesures que es representen en cada eix (excepte escales) es poden correspondre de forma directa amb la realitat, per la qual cosa sempre se solen dibuixar d'aquesta manera (formant un angle de 90º entre si).

El sistema de representació de punts en el pla més comú està format per dos eixos perpendiculars, un horitzontal anomenat ***eix d'abscisses***, on es representen els valors de la variable independent (que pren els valors lliurement, i que sol anomenar-se "*x*"), i un altre vertical anomenat ***eix d'ordenades***, on es representen els valors de la variable dependent (perquè es calculen a partir de l'altra, i que sol anomenar-se "y"). Ambdós reben el nom ***d'eixos de coordenades*** o ***eixos cartesians*** (en honor del famós filòsof i matemàtic francès Renè Descartes). El punt on es tallen ambdós eixos s'anomena ***origen de coordenades*** i, en tallar-se els dos eixos, el pla queda dividit en quatre zones, que es coneixen com a quadrants, i que s'anomenen en el sentit contrari a les agulles del rellotge començant des de la part positiva de l'eix d'abscisses.



Un conjunt format per l'origen *O*, els dos eixos de coordenades i la unitat de mesura és un **sistema de referència cartesià**.

1.2. Coordenades cartesianes.

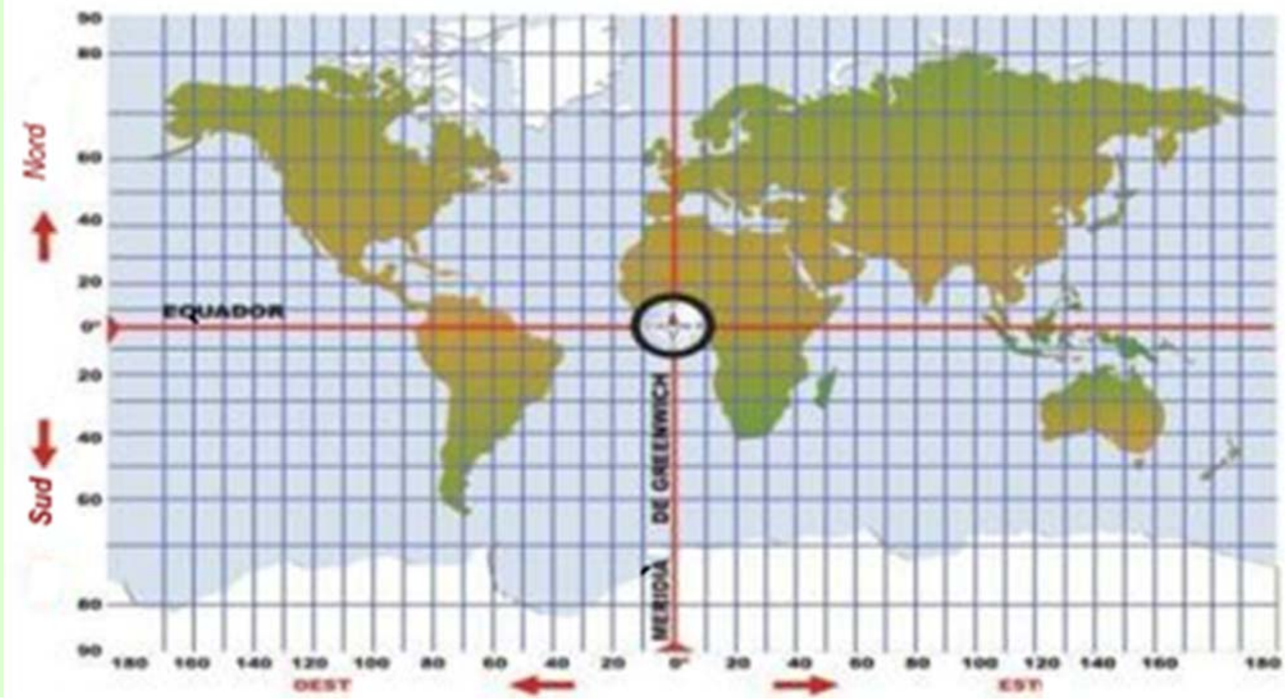
Una vegada establit el sistema de referència respecte al qual poder situar els punts, per a arribar a un en concret partim de l'origen, "O", recorrem una determinada quantitat cap a la dreta o l'esquerra i després un altre cap amunt o cap avall. Així cada punt queda determinat per un parell de nombres, la mesura dels camins realitzats en ambdues direccions, a les que anomenem **coordenades del punt**.

Exemple:

- En un mapa com el de l'exemple anterior, un punt queda determinat per la seua *latitud* (distància a l'Equador, mesurada sobre el meridià que passa pel dit punt) i la *longitud* (distància al Meridià de Greenwich, mesurada sobre el paral·lel que passa pel dit punt), anomenades *coordenades geogràfiques*. Per exemple, la situació de Madrid és (–3,41; 40,24):

  Longitud –3,41 o 3,41 O, és a dir, cal traslladar-se 3,41 cap a l'oest (esquerra) del meridià de Greenwich.

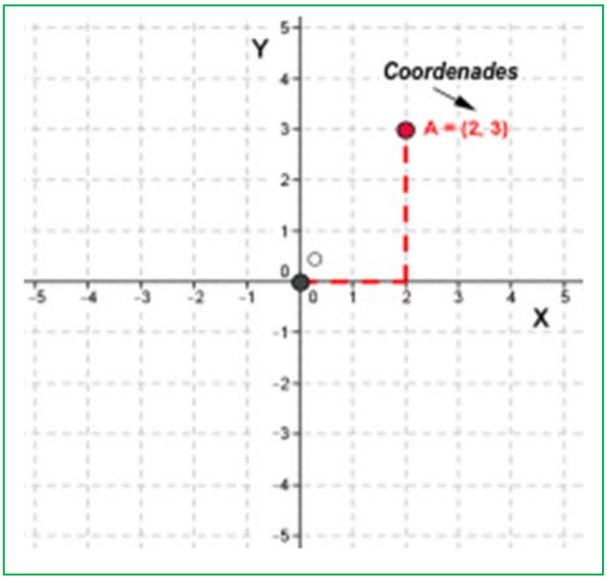
  Latitud +40,24 o 40,24 N, és a dir, cal traslladar-se 40,24 cap al nord (per damunt) de l'Equador.



Les **coordenades d'un** punt *A* són un parell ordenat de nombres reals **(*x*, *y*)**, sent "***x***" la primera coordenada o **abscissa** (ens indica la distància a què el dit punt es troba de l'eix vertical) i "y" la segona coordenada o **ordenada** (ens indica la distància a què el dit punt es troba de l'eix horitzontal).

Quan aqueix valor es pren cap a l'esquerra o cap avall ho indiquem amb un nombre **negatiu** i si és cap amunt o a la dreta ho indiquem amb un **positiu**, de la mateixa manera que fèiem en representar els nombres a la recta.

D'aquesta manera, qualsevol punt del pla queda totalment determinat mitjançant les seues coordenades i viceversa, a tota parella ordenada de nombres li correspon un punt del pla.

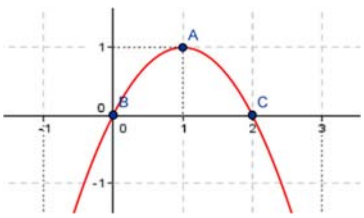


Exemple:

- Al gràfic anterior, el punt A té coordenades (2, 3).

Activitats resoltes

- *A la següent gràfica, indica les coordenades dels punts assenyalats:*



***A*(1, 1)**

***B*(0, 0)**

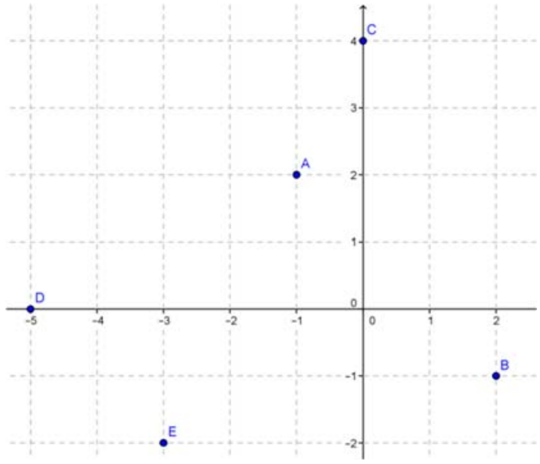
***C*(2, 0)**

D(3, –3)

E(–1, –3)

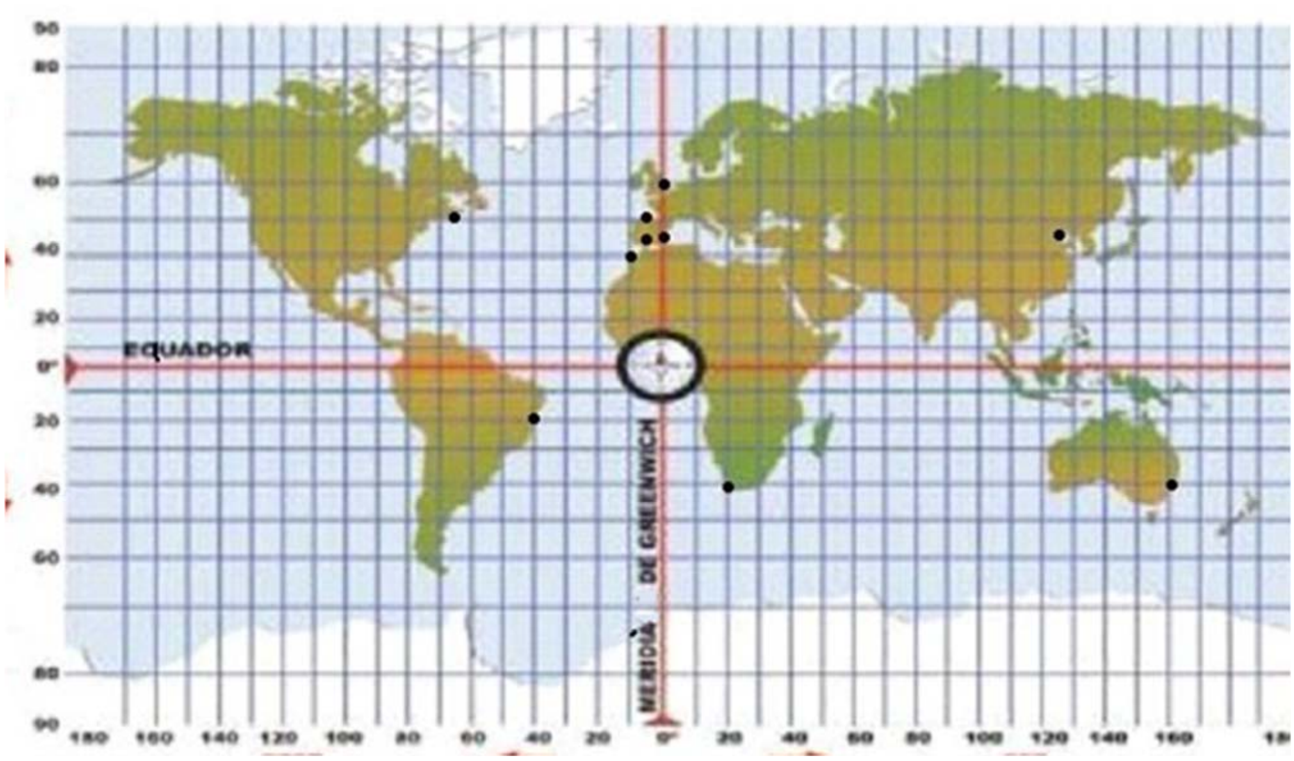
- *Representa gràficament els punts*:

$A(-1,2); B(2,-1); C(0,4);$
$D(-5,0); E(-3,-2)$



Activitats proposades

1. Fixa't al mapa següent, localitza els països o ciutats que es demanen i indica al teu quadern:



a) Els quadrants on es troben els països següents:

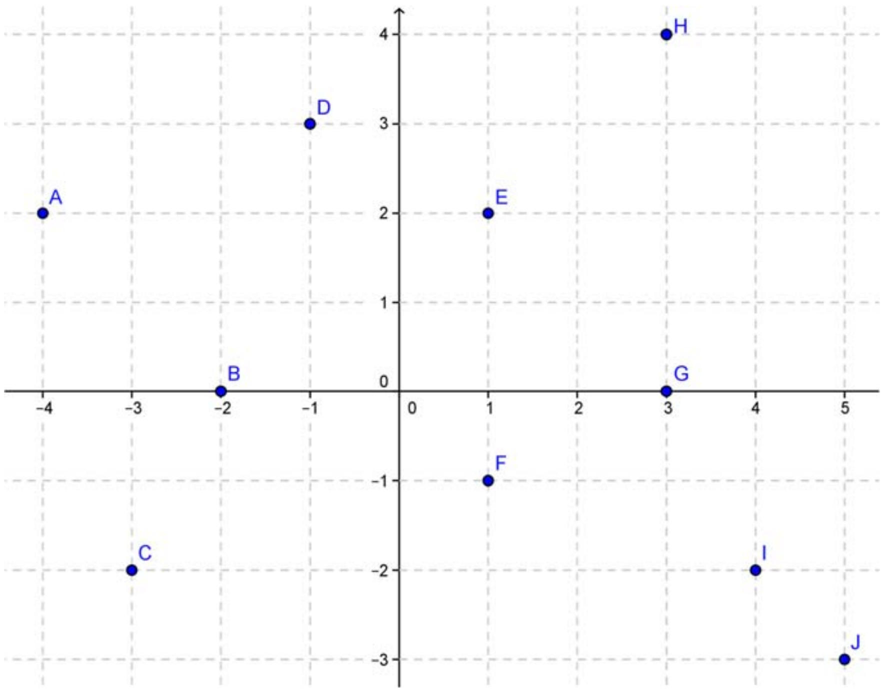
- Mèxic:
- Madagascar:
- Índia:
- Xile:

- Espanya:
- Argentina:
- Austràlia:
- Japó:
- Aràbia Saudita:
- Alemanya:
- EUA:
- El Marroc:

b) Les coordenades (aproximades) de les ciutats següents:

- Ciutat del Cap:
- Nova York:
- Rio de Janeiro:
- Alacant:
- Pequín:
- Rabat:
- Sidney:
- Oviedo:
- Londres:
- Còrdova:

i indica les coordenades de tots els punts que estan assenyalats al pla:



nt al teu quadern els següents punts del pla:

2. FUNCIONS

2.1. Concepte intuïtiu de funció.

Hi ha multitud de fenòmens en la nostra vida quotidiana en què apareixen relacionades dues magnituds. Per exemple, el preu d'un bitllet en un mitjà de transport i la distància o temps de duració del viatge, el preu d'un quilo de fruita o carn i el nombre de quilos que comprem, la duració d'un trajecte i la velocitat a què anem, el nombre de batecs del cor en una unitat de temps…

Moltes d'aqueixes relacions es regeixen per una llei de proporcionalitat, directa o inversa, però hi ha moltes altres en què la correspondència entre ambdues magnituds és més complexa.

Una **funció** és una relació entre dues magnituds de manera que a un valor qualsevol d'una (**variable independent**) li fem correspondre, com a màxim, un únic valor de l'altra (**variable dependent**).

Aquesta relació funcional es pot establir, moltes vegades, mitjançant una expressió matemàtica o fórmula, la qual cosa ens permetrà treballar de forma còmoda amb ella. Altres vegades ve donada mitjançant una taula on apareixen els valors relacionats entre si. De vegades tenim la relació en forma de gràfica… I també hi ha funcions que no es poden escriure mitjançant una expressió algebraica!

Exemples:

- *Un quilo de tomaques costa 0,59 €/kg. La funció que estableix quant hem de pagar en funció de la quantitat de tomaques que ens emportem és y = f(x) = 0,59 x.*

  En ella, ***f*** és el nom que li posem a la funció i podríem anomenar-la usant altres lletres (les que s'usen més sovint són *"f"*, *"g"* i *"h"*). Entre parèntesis va la variable "***x***" que representa el nombre de quilos que comprem, i és la variable independent ja que nosaltres triem lliurement la quantitat que volem o necessitem. Finalment, la variable "**y**" representa els diners que hem de pagar, y és la variable dependent ja que "depén" de quants quilos ens emportem, és a dir, de "*x*". L'expressió, f *(*x) es llig *"f de x"* ,se sol usar amb molta freqüència per a designar a la variable dependent perquè :

  1º) en ella es veu quina és la variable independent i, per tant:

  2º) resulta molt còmode escriure quant ens costaria comprar una quantitat concreta, per exemple, 2 kg. S'expressaria *"f* de 2*"* i el seu valor és *f*(2) = 0,59·2 *= 1,18* €.

- *Una persona que va passejant sempre a la mateixa velocitat, vol recórrer un carrer recte d'1 km en un temps determinat. La relació entre el temps que tardarà (en segons) i la velocitat que porta (en metres per segon) ve donada per la fórmula* $v(t)=\dfrac{1000}{t}$.

  En ella, "***v***" és el nom de la funció velocitat, 1000 són els metres que ha de recórrer i "***t***" el temps que tarda a recórrer el dit espai.

- *Tots els nombres decimals tenen la seua part entera i la seua part decimal. Doncs bé, tot nombre real es pot relacionar de forma única amb el nombre enter immediatament inferior, anomenat la seua "part entera" i representat* $E(x)$*. El fet de que aquest número siga únic fa que ens trobem davant d'una funció.*

Autor: Paco Moya i Nieves Zuasti

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Per exemple, la part entera de 8,3 és 8: $E(8'3)=8$; la de -4,2 és -5: $E(-4'2)=-5$ ...

Doncs bé, aquesta funció, a pesar de la seua senzilla descripció mitjançant paraules que ens diuen què hem de fer, no es pot escriure mitjançant una fórmula algebraica.

Activitats proposades

2. De les següents relacions entre dos variables, raona quines són funcionals i quines no:

a. Edat – altura de la persona al llarg de la seua vida
b. Altura – edat de la persona
c. Preu de la gasolina – dia del mes
d. Dia del mes – preu de la gasolina
e. Un nombre i la seua cinquena part
f. Un nombre i el seu quadrat
g. Un nombre i la seua arrel quadrada

3. Si hui el canvi € a $ està 1 € = 1,37 $, completa al teu quadern la següent taula d'equivalència entre les dues monedes:

Expressa mitjançant una fórmula la relació que existeix entre ambdues. Es pot expressar de forma única la dita relació? És una funció?

Sense realitzes el canvi en una oficina, et cobren una xicoteta comissió fixa per realitzar l'operació de 1,5 €. Com quedaria/en la fórmula/es en aquest cas?

ɜn Gate permet la comunicació entre els dos costats de la co. Les seues torres, de 746 peus d'altura, estan separades le 4200 peus aproximadament. La calçada, que té una i es troba a una altura de 220 peus sobre el nivell de l'aigua, ꞩ torres mitjançant dos cables, de 3 peus de diàmetre, que bola i que toquen la calçada al centre del pont.

-Realitza un dibuix on queden reflectits les dades més significatives del problema.

-Determina la relació que existeix entre l'altura a què es troba un punt del cable i la distància de la seua projecció vertical al centre del pont.

-Aplicar la dita fórmula per a calcular l'altura d'un punt del cable la vertical de la qual està a 1000 peus del centre del pont.

2.2. Gràfica d'una funció

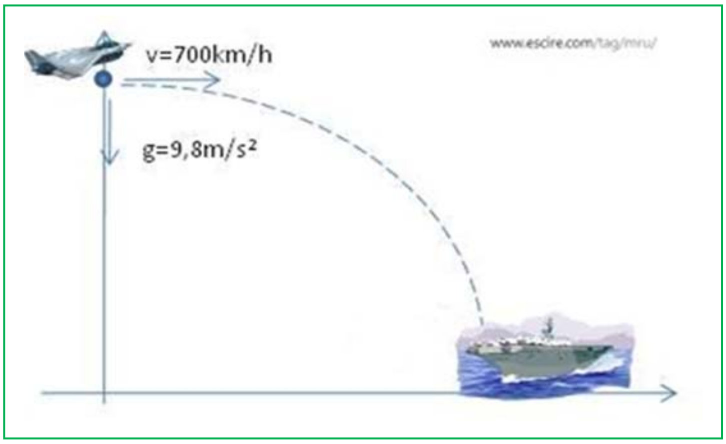
Ja que en tota funció tenim dos valors que es relacionen de forma única, podem dibuixar-los ambdós als eixos cartesians de manera que, si unim tots aqueixos punts, obtenim una corba que ens permet visualitzar la dita funció.

La dita representació té una sèrie de limitacions, moltes d'elles comunes a qualsevol dibuix que podem fer: és aproximada ja que els instruments que s'utilitzen per a fer-ho (regla, compàs, llapis…), per molt precisos que siguen (ordinadors), sempre tenen un marge d'error; també hi ha fallades de tipus visual o dels instruments de mesura; o moltes vegades hem de representar els infinits punts del grafo en un espai finit, la qual cosa és impossible i fa que només podem dibuixar una part del que es pretén, però no tot.

A pesar de tots aquests inconvenients, representar gràficament aquesta sèrie de punts relacionats que conformen la funció, encara que siga de forma aproximada, és important ja que ens fa molt més concret un concepte molt abstracte, en poder visualitzar-lo: "val més una imatge que mil paraules".

Exemple:

- *La trajectòria que ha de seguir un avió per a aterrar en un portaavions es correspon amb la representació de la funció que relaciona la distància recorreguda pel mateix depenent del temps que tarda a recórrer-la:*

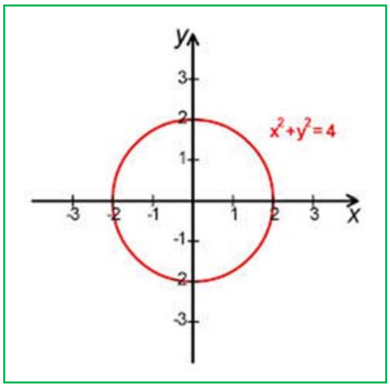


A més, una representació també ens permet descobrir si la mateixa representa a una funció o no, ja que en el dibuix és fàcil interpretar si a un valor de la variable independent li correspon únicament un de la dependent o més de u, propietat fonamental que defineix a les funcions.

Exemple:

- El següent dibuix, que correspon a una circumferència, al valor **0** de la variable independent li corresponen els valors **2** ***i*** **−2** de la dependent. A més, hi ha molts altres valors a què els passa el mateix, per la qual cosa **no** pot ser la representació d'una funció.

  La fórmula que correspon a dita gràfica és $x^2+y^2=4$ o, també, $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$.

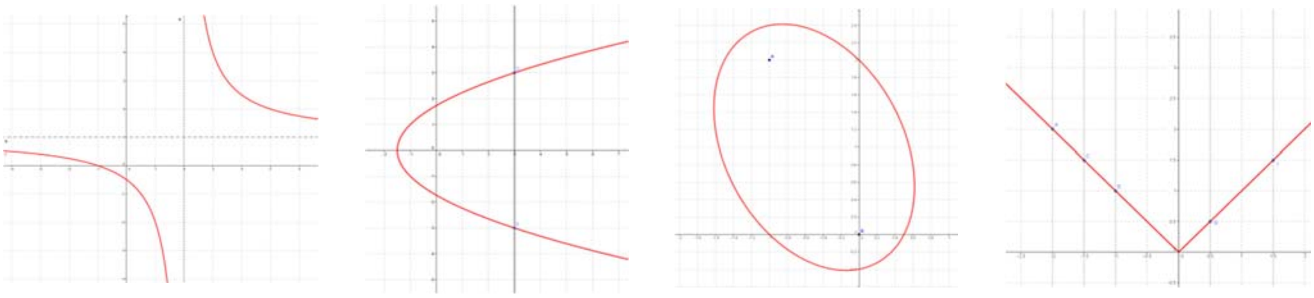


La **gràfica d'una funció és** la representació en el pla cartesià de tots els parells ordenats en els que el primer valor correspon a un qualsevol de la variable independent i el segon a què s'obté en transformar-lo mitjançant la funció:

$$\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$$

Activitats resoltes

- *Indica quines de les següents gràfiques corresponen a una funció i quines no:*



SÍ | **NO** | **NO** | **SÍ**

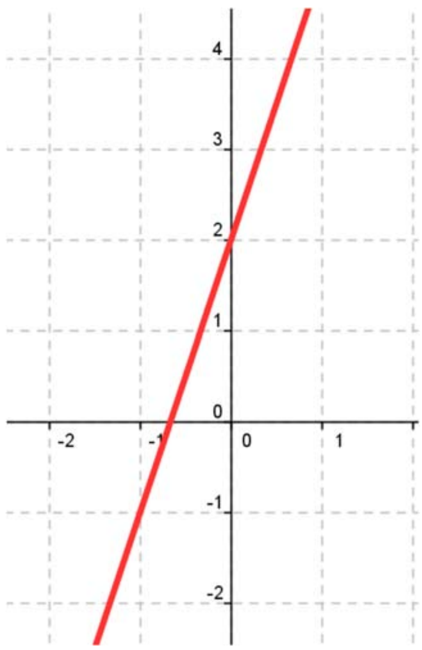
Quina és la clau o regla per a saber, a partir del dibuix, si aquest correspon a una funció o no?

Si tracem rectes verticals imaginàries i aquestes xoquen amb el dibuix, com a màxim, en un punt, la gràfica correspon a una funció. En qualsevol altre cas, no.

- *Dibuixa al pla cartesià els valors de la següent taula i conjectura sobre quin tipus de figura correspon a la gràfica de la funció:*

x	–	–	0	1	3
$f(x)$	–	–	2	5	1

GRÀFICA



Observem que els punts, en representar-los, estan alineats. Per tant, el dibuix que correspon a la gràfica de la funció és una RECTA.

En aquest cas, no és massa difícil descobrir que la fórmula que relaciona ambdues variables és:

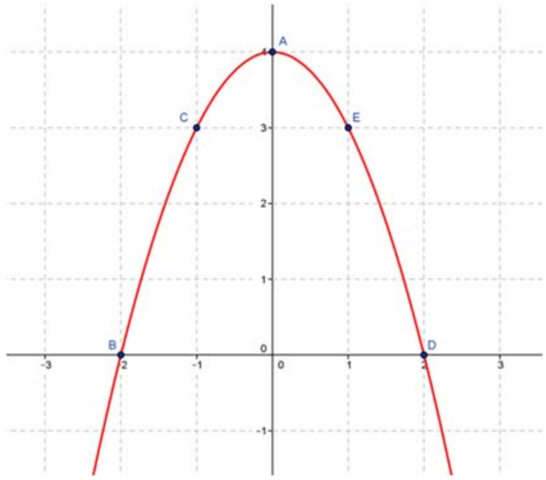
$$f(x) = \mathbf{3}x + \mathbf{2}$$

- *Completa la següent taula a partir de la fórmula de la funció f(x)=-x²+4, dibuixa els punts en els aqueixos cartesians i intenta unir-los mitjançant una corba:*

x	–	–	0	1	2
f(x)	***0***	***3***	***4***	***3***	***0***

La corba obtinguda rep el nom de **PARÀBOLA** (que és una de les quatre còniques).

GRÀFICA



Activitats proposades

4. Realitza al teu quadern el dibuix de dues gràfiques, una que correspongui a una funció i l'altra no. Identifica cada una i explica el perquè de la dita correspondència.

5. Realitza al teu quadern una taula amb 10 valors de la funció e(t) = 5t + 20, representa'ls gràficament i indica la figura que determinen. Si la dita funció representa l'espai (en quilòmetres) que recorre una persona que porta caminats 20 km i camina a una velocitat de 5 km/h, en funció del temps que tarda a recórrer-ho (en hores), indica quins serien els valors que no tindria sentit donar a la variable independent i en què es tradueix això en la gràfica.

6. Raona si els valors de la següent taula poden correspondre als d'una funció i per què:

x	–13	–7	10	–13	24
f(*x*)	–15	0	14	3	0

7. En un full de paper quadriculat ratlla un quadrat de costat un quadradet. Quina és la seua àrea? Ara fes el mateix amb un quadrat de costat 2. Continua prenent quadrats de costats 3, 4, 5… i calcula les seues àrees. Amb els resultats completa una taula de valors i dibuixa la seua gràfica. Té sentit per a valors negatius de la variable? Busca una fórmula per a aquesta funció.

8. Per a aparcar en zona blava (no residents) hi ha unes tarifes. Representa una gràfica de la funció la variable independent de la qual siga el temps i la variable dependent el preu (en euros) que cal pagar.

9. Un fabricant vol construir gots cilíndrics mesuradors de volums, que tinguen de radi de la base 4 cm i d'altura total del got 24 cm. Escriu una fórmula que indique com varia el volum en anar variant l'altura del líquid. Construeix una taula amb els volums corresponents a les altures preses de 3 en 3 cm. Escriu també una fórmula que permeta obtindre l'altura coneixent els volums. A quina altura caldrà col·locar la marca per a tindre un decilitre?

2.3. Exemples de funcions: funció afí i quadràtica

Durant tots els apartats anteriors hem anat analitzant distints exemples de relacions entre dos variables que eren funció i altres que no. Ho hem fet des del punt de vista gràfic, de taules de valors i de fórmules matemàtiques.

En aquesta secció, simplement analitzarem uns quants exemples de funcions que són prou senzilles i que tenen prou aplicacions pràctiques.

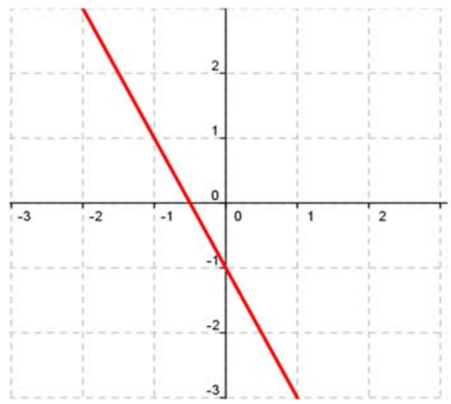
Una **funció afí** és aquella funció en què la relació entre les dos variables ve donada per un polinomi de grau menor o igual a un:

$$y = f(x) = mx + n.$$

La seua representació gràfica és sempre una **recta**, el seu **pendent** és el coeficient líder (m) i indica la inclinació de la mateixa (si és positiu la recta serà **creixent** i si és negatiu **decreixent**) i la seua **ordenada a l'origen** (n) és el terme independent, que ens proporciona el punt on la recta talla a l'eix d'ordenades.

Exemple:

GRÀFICA



- $y = -\mathbf{3}x - \mathbf{1}$ (polinomi de primer grau)

x	-2	-1	$-1/2$	0	1
$f($	3	1	0	**-1**	**-3**
	(–2, 3)	(–1, 1)	(–1/2, 0)	(0, –1)	(1, –3)

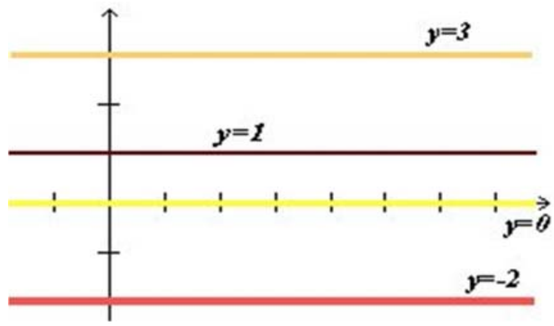
Pendent: $-\mathbf{3}$ ⇒ recta decreixent

Ordenada a l'origen: $-\mathbf{1}$ ⇒ **(0, –1)** punt de tall de la recta amb l'eix d'ordenades

Com a casos particulars de funcions afins tenim:

Funció constant (recta horitzontal): és aquella que sempre pren el mateix valor per a tots els valors de la variable independent (el pendent és nul):

$$y = n$$



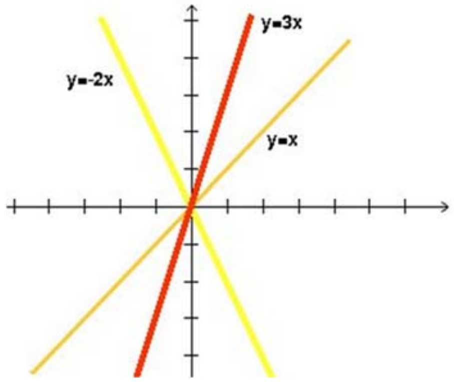
Exemple:

- Gràfiques de $y = 3$; $y = 1$; $y = 0$; $y = -2$.

Per tant, la recta no té inclinació, és a dir, és paral·lela a l'eix d'abscisses.

Observa que:

L'equació de l'eix d'abscisses és y = 0.



Funció lineal o **de proporcionalitat directa**: és aquella que té ordenada en l'origen igual a **0** (passa per l'origen de coordenades): *y=mx*

Cada valor de "***y***" conserva una mateixa proporció respecte al de "***x***":

y=3x (*y* és el triple de *x*)

y=-2x (*y* és l'oposat del doble de *x*)

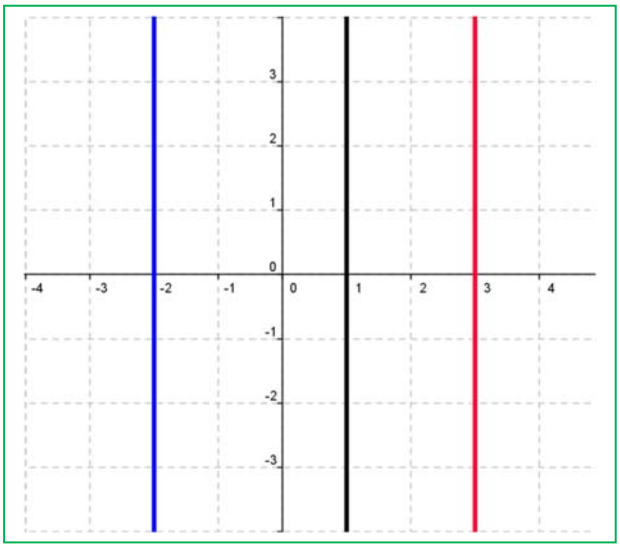
y=x (**funció identitat**: *y* és igual a *x*)

Observa que:

La gràfica de *x* = *a* és una recta vertical, però no és una funció perquè per al valor de la variable independent "*a*", l'ordenada pren infinits valors.

Exemple:

- Dibuixa la gràfica de *x* = 3; *x* = –2; *x* = 1.L'equació de l'eix d'ordenades és x *0* =.



Activitats proposades

4. Escriu tres funcions les gràfiques del qual siguen tres rectes que passen per l'origen de coordenades i els seus pendents siguen 3, –2, i 1/2 respectivament.

5. Quin angle forma amb l'eix d'abscisses la recta y = *x*? I la recta *y* = –x?

6. Un metre d'una certa tela costa 1,35 €, quant costen 5 metres? I 10 m? I 12,5 m? Quant costen "*x*" metres de tela? Escriu la fórmula d'aquesta situació.

7. Troba l'equació i dibuixa la gràfica de les rectes següents:

a) El seu pendent és 2 i la seua ordenada a l'origen és 3.
b) Passa pels punts *A*(1, 3) i *B*(0, 4).
c) La seua ordenada en l'origen és 0 i el seu pendent és 0.
d) Passa pels punts *C*(–1, 3) i *D*(–2, 5).
e) Passa pel punt (*a*, *b*) i té de pendent *m*.

8. Com són entre si dues rectes del mateix pendent i distinta ordenada a l'origen?

9. Dibuixa al teu quadern, sense trobar la seua equació, les rectes següents:

a) De pendent 3 i ordenada a l'origen 0.
b) Passa pels punts *A*(2, 3) i *B*(4, 1).
c) El seu pendent és 2 i passa pel punt (4, 5).

Una **funció quadràtica** és aquella funció en què la relació entre les dos variables ve donada per un polinomi de grau dos:

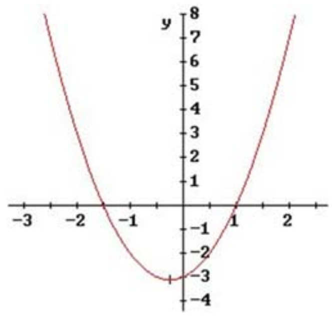
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

La gràfica d'aquest tipus de funcions s'anomena **paràbola**

Si el coeficient líder o quadràtic és positiu (***a*>0**), la paràbola està oberta cap a l'eix I positiu (**convexa**).

$y = 2x^2 + x - 3$

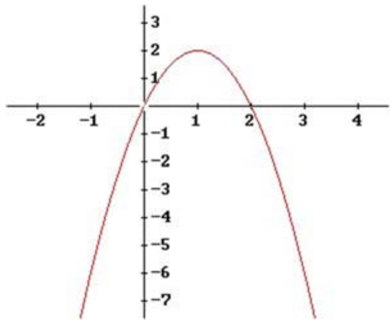
2 > 0



Si el coeficient líder o quadràtic és negatiu (***a*<0**), la paràbola està oberta cap a l'eix I negatiu (**còncava**).

$y = -2x^2 + 4x$

–2 < 0



Els altres coeficients del polinomi afecten la posició que ocupa la paràbola respecte als eixos.

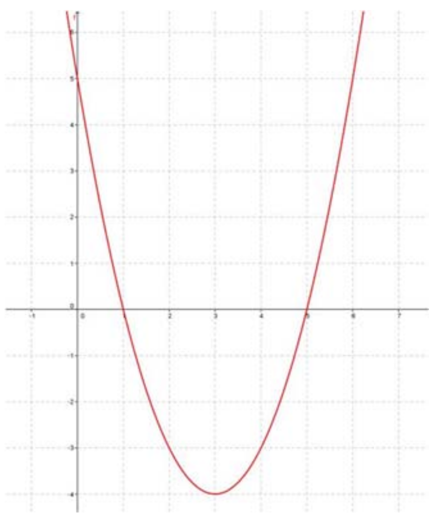
No podem dir que una funció quadràtica és creixent o decreixent, ja que hi ha un tros (**branca**) que creix i un altre que decreix. El punt on es produeix aqueix canvi s'anomena **vèrtex** i és el major (*màxim*) o menor (*mínim*) valor que pren la funció. Podem dir que aquest punt és el més significatiu en una paràbola, i per això és important saber calcular-lo. Per a això, li donem a la variable independent el valor $x = \frac{-b}{2a}$, i el substituïm en la funció per a calcular "***y***". El dit valor és fàcil de recordar ja que és el mateix que apareix a la fórmula de les equacions de 2º grau llevant-li l'arrel quadrada, i s'obté precisament pel caràcter de màxim o mínim que té el vèrtex.

Exemple:

GRÀFICA

- ***X^2-6x+5***

x	3	1	5	0	6
f(x)	–4	0	0	5	5
	(3, –4)	(1, 0)	(5, 0)	(0, 5)	(6, 5)



Coeficient líder: **1** > 0 $\Rightarrow$ paràbola convexa

Vèrtex: $x = \left[\frac{-b}{2a}\right]_{\substack{a=1\\b=-6}} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow$ **(3,–4)**

Ordenada a l'origen: **5** $\Rightarrow$ **(0, 5) punt *de tall*** *amb l'eix d'ordenades.*

Punts d'intersecció amb l'eix d'abscisses: **(1, 0)** i **(5,0)**

Activitats proposades

10. Còpia al teu quadern i completa:

$y = 3x + 3$ → Funció ____________________ *perquè* ____

X	*y*

→
→
→
→
→

Solució

Gràfica

Operacions:

$y = \frac{-x}{2}$ → *Funció* ____________________ perquè ____

X	*y*

→
→
→
→
→

Solució

Gràfica

Operacions:

Autor: Paco Moya i Nieves Zuasti
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

$y = -3x^2 + 6x - 4 \rightarrow$ *Funció*____________________perquè____

x	*y*

Solució

→

→

→

→

→

Gràfica

Operacions:

$y = 2x^2 - 8 \rightarrow$ *Funció* ____________________ perquè ____

x	*y*

Solució

→

→

→

→

→

Gràfica

Operacions:

11. Dibuixa la gràfica de la funció $y = x^2$.

a) Per a això fes una taula de valors, prenent valors d'abscissa positiva.
b) Prenent valors d'abscissa negativa.
c) Què li ocorre a la gràfica per a valors grans de "x"? I per a valors negatius grans en valor absolut?
d) La corba és simètrica? Indica el seu eix de simetria.
e) Té un mínim? Quin és? Coordenades del vèrtex.
f) Retalla una plantilla d'aquesta paràbola marcant el seu vèrtex i l'eix de simetria, que usarem en altres problemes.

12. Prenent la mateixa unitat que al problema anterior dibuixa al teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles: $y = x^2 + 2$; $y = x^2 - 3$; $y = -x^2$; $y = -x^2 + 2$; $y = x^2 - 1$. Observa que pots utilitzar la plantilla de l'exercici anterior. Fes un resum indicant el que has obtingut. Hauràs observat que en tots els casos pots utilitzar la plantilla traslladant-la en sentit vertical, cap amunt en el cas de $y = x^2 + 2$; i cap avall en el cas de $y = x^2 - 3$. La paràbola $y = -x^2$; és simètrica (cap avall) de $y= x^2$. En general, si traslladem q unitats en la direcció de l'eix d'ordenades tenim la paràbola $y= x^2+q$.

13. Prenent la mateixa unitat que al problema anterior dibuixa al teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles: $y = (x + 2)^2$; $y = (x - 3)^2$; $y = (x + 1)^2$; $y = (x - 1)^2$. Observa que pots utilitzar la plantilla de l'exercici anterior. Fes un resum indicant el que has obtingut. Hauràs observat que en tots els casos pots utilitzar la plantilla traslladant-la en sentit horitzontal, cap a la dreta en el cas de $y = (x - 3)^2$; i cap a l'esquerra en el cas de $y = (x + 2)^2$. Pel que, en general, si traslladem p unitats en la direcció de l'eix d'abscisses obtenim la paràbola $y = (x - p)^2$.

14. Escriu l'equació d'una paràbola de la mateixa manera que $y = x^2$, però traslladada 5 unitats en sentit horitzontal a la dreta i 3 unitats en sentit vertical cap amunt. Quines coordenades té el seu vèrtex?

15. Dibuixa al teu quadern, en un mateix sistema de referència, les gràfiques de les paràboles:

16. $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = 1/3x^2$; $y = -x^2$; $y = -1/2x^2$; $y = -3x^2$.

17. Observa que ara ja no et serveix la plantilla emprada. Ara les paràboles s'estreteixen o s'eixamplen.

18. Completa aquest resum. La gràfica de $y = ax^2$ s'obté de la de $y = x^2$:

a) Si $a > 1$ doncs ??

b) Si $0 < a < 1$ doncs ??

c) Si a **<**1 doncs ??

d) Si 1 < a < 0 doncs ??

Tornem a usar la plantilla.

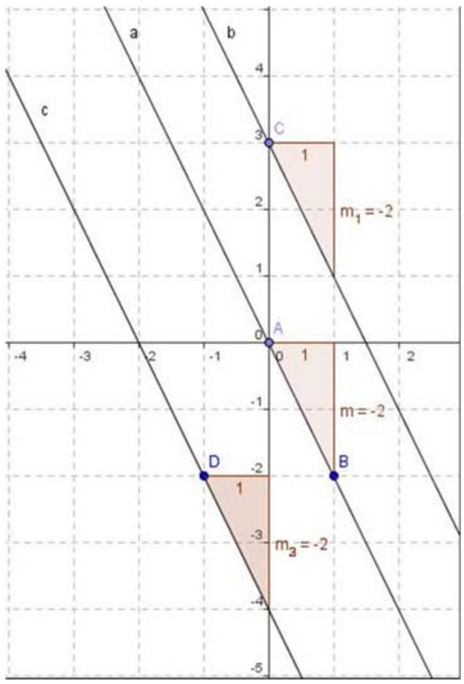
19. a) Traslladа el vèrtex de la paràbola $y = x^2$ al punt (4, 2). Escriu la seua equació i l'equació del seu eix de simetria. Dibuixa la seua gràfica.

20. b) Trasllada el vèrtex de la paràbola $y = x^2$ al punt (−3, −1). Escriu la seua equació i l'equació del seu eix de simetria. Dibuixa la seua gràfica.

2.4. Gràfiques de funcions amb Geogebra. Gràfiques de funcions lineals i afins

En aquesta activitat es va a utilitzar el programa ***Geogebra*** per a representar funcions lineals i afins, les gràfiques d'aquestes funcions són rectes. Primer es representen rectes amb el mateix pendent per a observar la relació que existeix entre elles i determinar la propietat que les caracteritza. També es representen rectes que tenen mateixa ordenada a l'origen per a observar la relació que existeix entre elles i determinar una característica comuna.

Activitats resoltes



- *Utilitza Geogebra per a estudiar rectes amb el mateix pendent.*
- Obri el programa Geogebra i en **Visualitza** activa **Quadrícula** perquè siga més fàcil definir punts.
- Amb la ferramenta **Nou Punt** defineix un punt a l'origen de coordenades. Observa que a la **Finestra Algebraica** apareix el punt, que el sistema denomina *A*, com a objecte lliure i coordenades (0, 0).
- Defineix un **Nou Punt** de coordenades (1, –2), el programa l'anomena *B* i a la **Finestra Algebraica** apareix com a objecte lliure amb les seues coordenades: B = (1, –2).
- Utilitza la ferramenta **Recta que passa per 2 punts** per a dibuixar la recta que passa pels punts *A* i *B*. Observa que el programa la denomina *a* i en la **Finestra Algebraica** apareix com a objecte dependent i la seua equació a: $2x + y = 0$. Aquesta equació es pot expressar per: $y = -2x$.
- Defineix un **Nou Punt** de coordenades (0, 3), el programa l'anomena *C* i a la **Finestra Algebraica** apareix com a objecte lliure amb les seues coordenades: *C* = (0, 3).
- Amb la ferramenta **Recta Paral·lela**, dibuixa una recta paral·lela a la recta a què passe per *C*. Observa que el programa la denomina *b* i a la **Finestra Algebraica** apareix com a objecte dependent i la seua equació a: $2x+ y = 3$. Aquesta equació es pot expressar per: $y = -2x + 3$.
- Defineix un **Nou Punt** de coordenades (–1, –2), el programa l'anomena *D* i a la **Finestra Algebraica** apareix com a objecte lliure amb les seues coordenades: D(1, –2).
- Amb la ferramenta **Recta Paral·lela**, dibuixa una recta paral·lela a la recta a què passe per *D*. Observa que el programa la denomina *c* i a la **Finestra Algebraica** apareix com a objecte dependent i la seua equació a: $2x+ y = -4$. Aquesta equació es pot expressar per: $y = -2x - 4$.
- Utilitza la ferramenta **Pendent** per a calcular els pendents de les rectes *a*, *b* i *c*. Observa que en calcular el pendent de la recta *a* apareix en la gràfica i a la **Finestra Algebraica** com a objecte dependent $m = -2$. Anàlogament en calcular el pendent de la recta *b*, s'obté $m_1 = -2$ i en calcular el pendent de la recta *c*, es té $m_2 = -2$.

21. Com són els pendents de les rectes paral·leles? En funció dels resultats anteriors realitza una conjectura i dibuixa altres rectes paral·leles a la recta *a* per a comprovar-la.

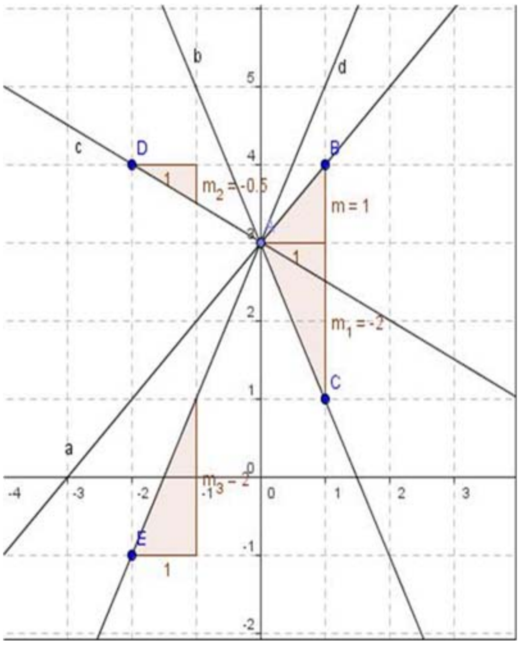
Observa que l'equació de totes les rectes paral·leles a la recta *a* són de la forma:

$y = -2x + n$, con *n* variable.

Alguna de les rectes que has dibuixat és la gràfica d'una funció lineal?

Autor: Paco Moya i Nieves Zuasti
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Rectes amb la mateixa ordenada a l'origen



- *Utilitza Geogebra per a estudiar rectes amb igual ordenada a l'origen.*
- Obri una **Nova Finestra** que és una opció del menú **Arxiu**.
- Amb la ferramenta **Nou Punt** defineix un punt de coordenades (0, 3). Observa que a la **Finestra Algebraica** apareix el punt, que el sistema denomina *A*, com a objecte lliure i apareixen les seues coordenades *A* = (0, 3).
- Defineix un **Nou Punt** *B* de coordenades (1, 4) i amb la ferramenta **Recta que passa per 2 punts** dibuixa la recta que passa per *A i B*, el programa la denomina *a* i a la **Finestra Algebraica** apareix la seua equació, *a*: -x + y = 3 equivalent a *y = x* +3.
- Defineix un **Nou Punt** *C* de coordenades (1, 1) i amb la ferramenta **Recta que passa per 2 punts** dibuixa la recta que passa per *A i C*, el programa la denomina *b* i a la finestra algebraica apareix la seua equació, *b*: 2x + y = 3 equivalent a y = –2*x* +3
- Amb un procés semblant dibuixa la recta *c* que passa per *A i D*, amb *D* = (–2, 4) que té per equació *c*: *x* + 2*y* = 6. Aquesta equació es pot expressar per: $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
- Dibuixa també la recta *d* que passa per *A* i *E*, amb *E* = (–2, –1), l'equació de la recta *d* que apareix és:

d: –4*x* +2*y* = 6, equivalent a *y* = 2*x* + 3.

- Utilitza la ferramenta **Pendent** per a calcular els pendents de les quatre rectes que has dibuixat.
  - Observa que les quatre rectes que has dibuixat passen pel punt *A* = (0, 3), les seues equacions amb la variable *y* aïllada són:

a: *y* = *x* +3 *b*: *y* = -2*x* +3 *c*: $y = -\frac{1}{2}x + 3$ *d*: *y* = 2*x* + 3.

22. Què tenen en comú les equacions de les rectes que passen pel punt *A* (0, 3)? En funció dels resultats anteriors realitza una conjectura i comprova-la dibuixant altres rectes que passen pel punt *A*.

Observa que l'equació de totes les rectes que passen pel punt *A*(0, 3) són de la forma:

y = mx + 3, sent *m* el pendent de la recta.

A l'equació de la recta *y = mx + n*, el paràmetre *n* es denomina ordenada en l'origen

23. Quin és el valor de l'ordenada a l'origen de les quatre rectes que has dibuixat?

24. Observa les equacions de les quatre rectes que has dibuixat, dos d'elles tenen pendent positiu *a* i *d i* les altres dos, *b* i *c* tenen pendent negatiu. Relaciona el signe del pendent de la recta amb el creixement o decreixement de la funció que representen.

Activitats proposades

25. Calcula dos punts de les rectes d'equacions: y = 2x + 2 e $y = -\frac{x}{2} + 2$, per a dibuixar-les amb Geogebra. Indica dues propietats comunes d'ambdues gràfiques.

26. Representa, també, les rectes d'equacions: y = -3x + 1 e $y = \frac{x}{3} - 3$

27. Quina condició han de verificar els pendents de dues rectes perquè siguen perpendiculars?

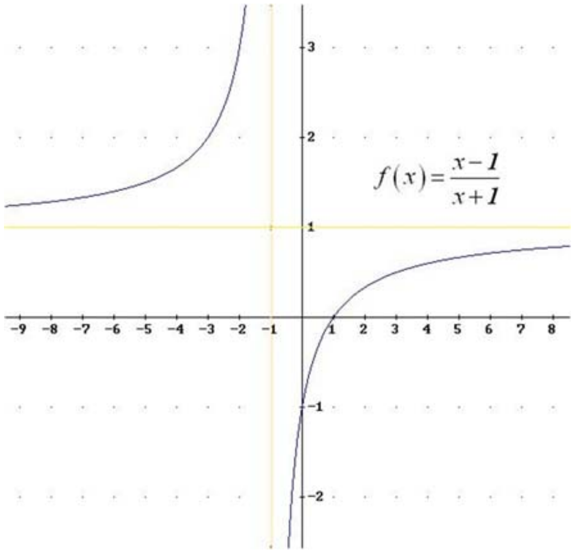
3. CARACTERÍSTIQUES D’UNA FUNCIÓ

3.1. Continuïtat

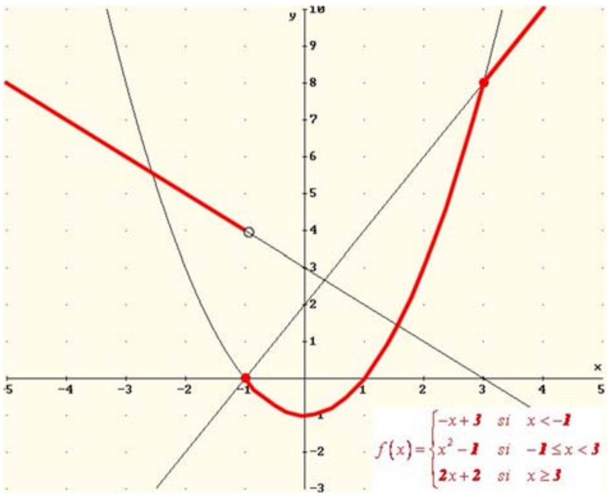
El concepte de continuïtat d’una funció és molt intuïtiu (a la majoria de les funcions) ja que es correspon amb que la gràfica es puga dibuixar sense alçar el llapis del paper. Quan açò no ocorre, es produeixen “bots” en determinats punts que reben el nom de discontinuïtats.

Exemples:

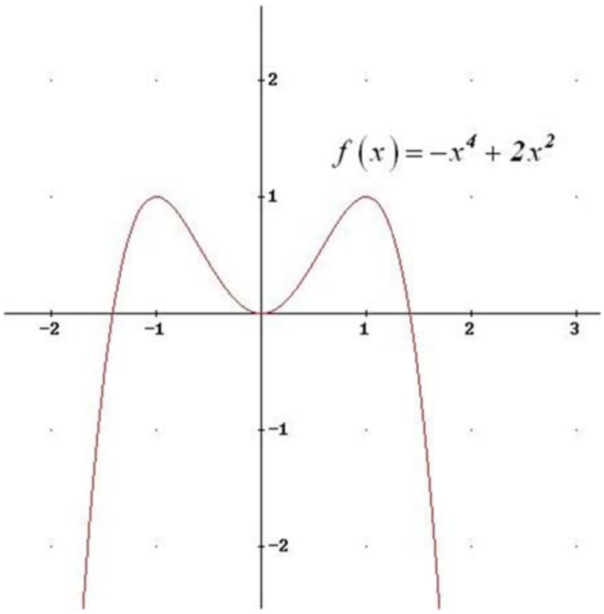
- *Quines funcions són contínues segons el seu dibuix i quines no? Indica en aquestes últimes el/els valor/s de la variable independent on es produeix la discontinuïtat:*



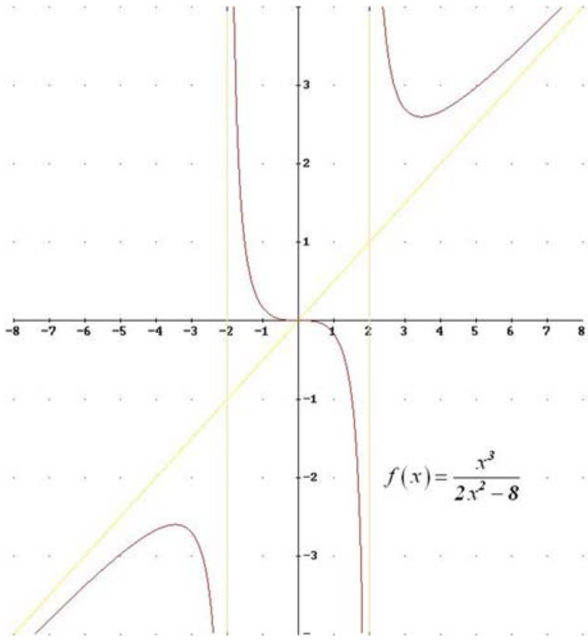
NO (en *x* = –1 té un bot infinit)



NO (en *x* = –1 té un bot finit de 4 unitats)



SÍ (contínua per a qualsevol valor de *x*)



NO (en *x* = –2 i *x* = 2 té bots infinits)

3.2. Monotonia: creixement i decreixement

Una funció és **creixent** en un interval quan en augmentar el valor de la variable independent augmenta també el de la dependent.

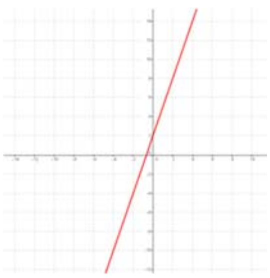
Una funció és **decreixent** en un interval si en augmentar el valor de la variable independent disminueix el de la dependent.

Una funció és **monòtona** en un interval quan és creixent o decreixent en el dit interval.

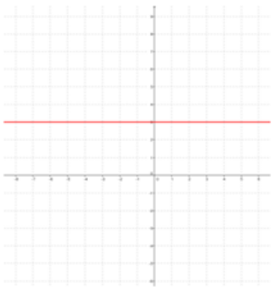
Una funció és **constant** en un interval quan prenga el valor que prenga la variable independent, la dependent pren sempre el mateix valor.

Com indiquen les definicions, la monotonia o no d'una funció es dóna en un interval. Per tant, una funció pot ser creixent per a una sèrie de valors, per a altres ser decreixent o constant, després pot tornar a ser creixent o decreixent o constant…

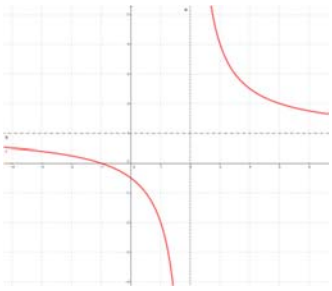
Exemple:



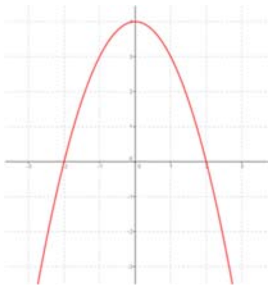
CREIXENT sempre



CONSTANT sempre



***DECREIXENT fins a x* = 2**
***DECREIXENT des de x* = 2**

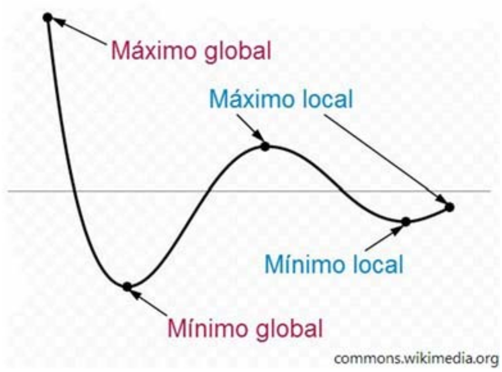


***CREIXENT fins a x* = 0**
***DECREIXENT des de x* = 0**

3.3. Extrems: màxims i mínims

Una funció presenta un **màxim relatiu** (o màxim global) en un punt quan el valor de la funció al dit punt és major que qualsevol dels valors que estan al seu voltant (al seu *entorn*). Si, a més, el valor és major que en qualsevol altre punt de la funció, es diu que la funció aconsegueix un **màxim absolut** (o màxim global) en ell.

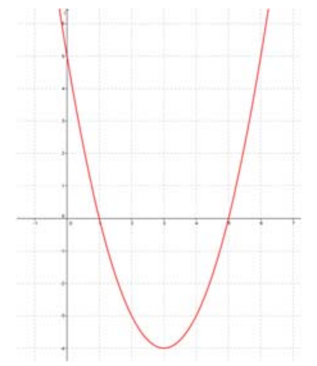
Una funció presenta un **mínim relatiu** (o mínim local) en un punt quan el valor de la funció en el dit punt és menor que en qualsevol dels valors que estan al seu voltant (al seu *entorn*). Si, a més, el valor és menor que en qualsevol altre punt de la funció, es diu que la funció aconsegueix un **mínim absolut** (o global) en ell.



Autor: Paco Moya i Nieves Zuasti
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Si una funció presenta un màxim o un mínim en un punt, es diu que té un **extrem** en el dit punt, que podrà ser relatiu o absolut.

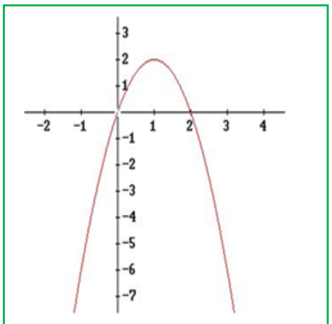
Exemples



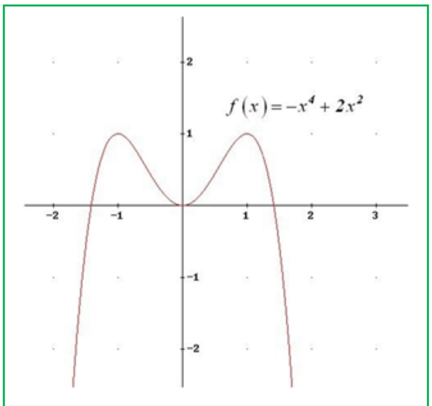
$y = x^2 - 6x + 5$

- La paràbola $y = x^2 - 6x + 5$ té un mínim absolut al seu vèrtex (3, –4). No té màxims, ni relatius ni absolut. Abans del vèrtex és decreixent i després és creixent.
- La paràbola $y = -2x^2 - 4x$ té un màxim absolut al seu vèrtex (1, 2). No té mínims, ni relatius ni absolut. Abans del vèrtex, per a $x < 1$, la funció és creixent, i després, per a $x > 1$, la funció és decreixent.

Totes les paràboles tenen un màxim o un mínim absolut al seu vèrtex.

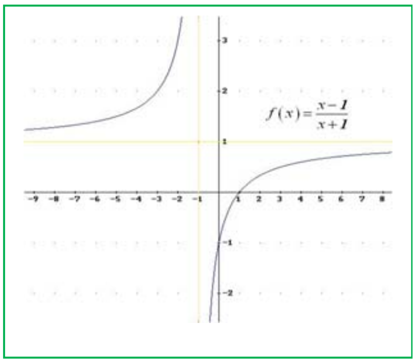


$y = -2x^2 - 4x$

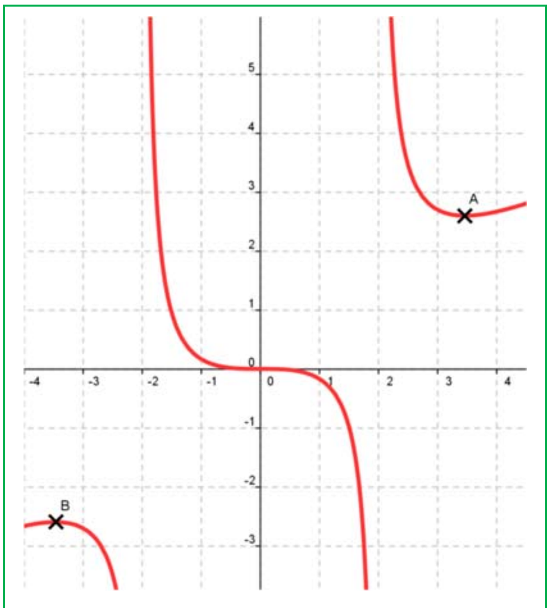


- La funció $y = -x^4 + 2x^2$ té un mínim absolut a l'origen (0, 0) i dos màxims en (1, 1) i en (–1, 1). Per a $x < -1$ és una funció creixent, per a $-1 < x < 0$, és una funció decreixent, per a $0 < x < 1$ és creixent, i per a $x > 1$ és decreixent.

Observa, als **màxims** sempre la funció passa de ser **creixent** a ser **decreixent**, i el els **mínims** de ser **decreixent** a ser **creixent**.



- La funció $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ no té ni màxims ni mínims (ni relatius ni absoluts). És una funció sempre creixent.



- La gràfica de la funció $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-8}$ no té màxim ni mínim absolut, però té un mínim relatiu cap a $x = 3$, A(3'46, 2'6), i un màxim relatiu cap a $x = -3$, B(–3'46, –2'6). Observa que el valor del mínim relatiu, 2'6, és major que la del màxim relatiu, –2'6. Però en valors pròxims al mínim si és el menor valor, per aquest motiu es denominen "*relatiu*", "*local*". No són els valors majors o menors que aconsegueix la funció, però si únicament mirem en un entorn del punt si són valors màxims o mínims.

3.4. Simetria

Una **funció parell** és aquella en què s'obté el mateix en substituir un nombre que el seu oposat:

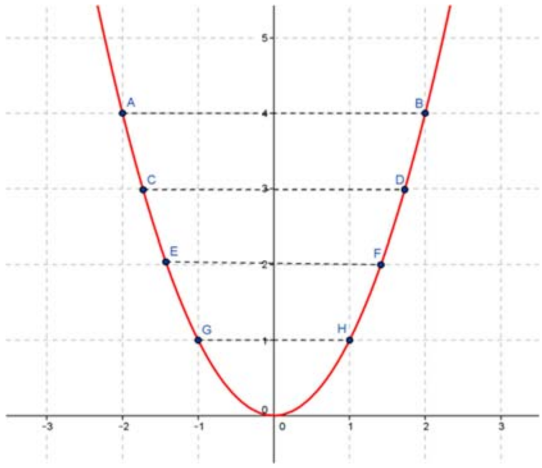
$$f(-x) = f(x)$$

Aquesta propietat es tradueix en que la funció és **simètrica** respecte a **l'eix d'ordenades**, és a dir, si dobleguem el paper pel dit eix, la gràfica de la funció coincideix en ambdós costats.

Exemple:

- La funció quadràtica $f(x) = x^2$ és parell:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

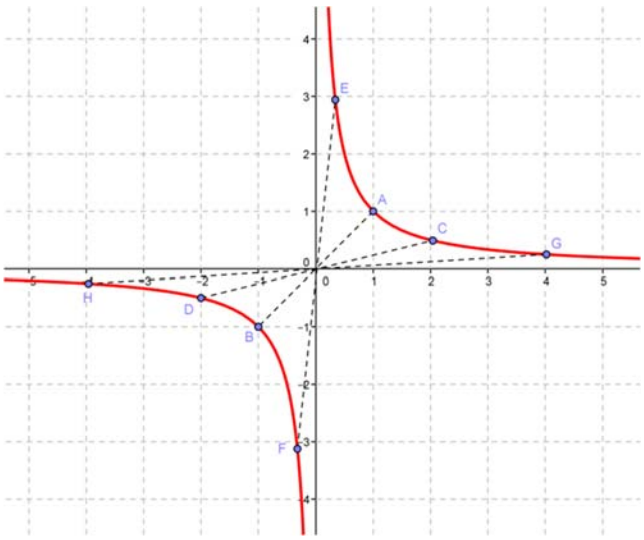


Una **funció imparella** és aquella en què s'obté el contrari en substituir un nombre que el seu oposat:

$$f(-x) = -f(x)$$

Aquesta propietat es tradueix en que la funció és **simètrica respecte a l'origen** de coordenades, és a dir, si tracem un segment que part de qualsevol punt de la gràfica i passa per l'origen de coordenades, en prolongar-lo cap a l'altre costat trobarem un altre punt de la gràfica a la mateixa distància.

Exemple:



- La **funció de proporcionalitat inversa** $f(x) = \frac{1}{x}$ és imparella perquè:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

Autor: Paco Moya i Nieves Zuasti
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

3.5. Periodicitat

Una **funció periòdica** és aquella en què les imatges de la funció es repeteixen sempre que se li afig a la variable independent una quantitat fixa, anomenada període.

Exemple:

- Un exemple de funció periòdica és el següent, que correspon a un electrocardiograma:

S'observa clarament que la gràfica es repeteix a intervals iguals, ja que els batecs del cor són rítmics.

Activitats resoltes

- *Què significaria, a la gràfica anterior, que els intervals de repetició no foren iguals?*

  Si no tenim un període fix, voldria dir que el cor no està funcionant de forma rítmica i, per tant, diríem que s'ha produït una "arítmia".

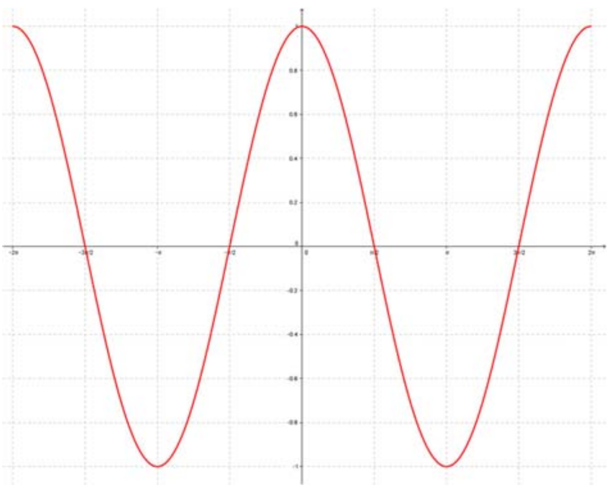
- *Com influiria a la gràfica anterior el que el període siga més o menys gran? Quin significat tindria?*

  Si el període és més gran, és a dir, els intervals de repetició es troben més distanciats, tindríem un ritme de batec més lent (menys pulsacions per minut), el que es coneix com "bradicàrdia".

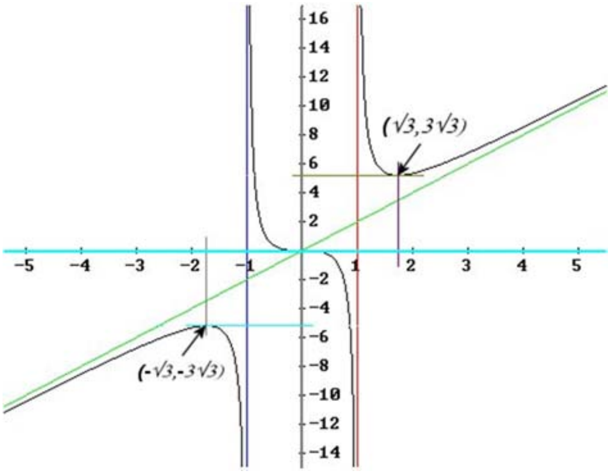
  Si el període és menor, passaria just tot al contrari, açò és, el cor estaria bategant més ràpid del normal (més pulsacions per minut) i tindríem una "taquicàrdia".

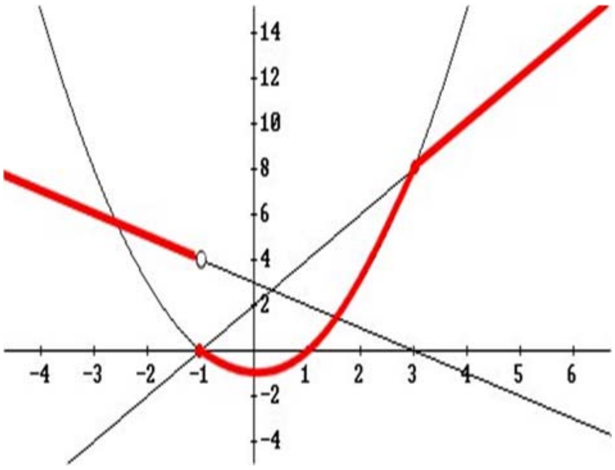
Activitats proposades

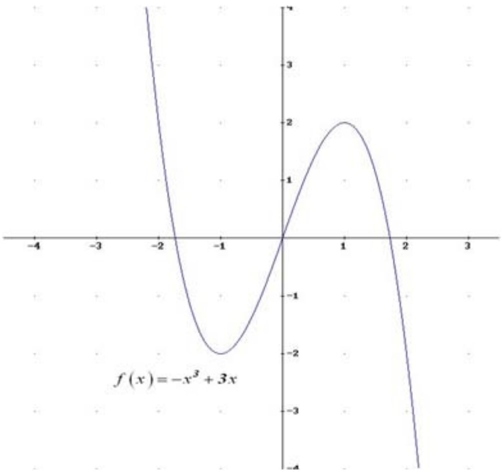
28. Copia les següents taules al teu quadern i assenyala totes les característiques que pugues de les funcions representades mitjançant les seues gràfiques:



Autor: Paco Moya i Nieves Zuasti
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

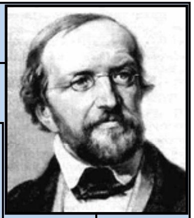

(√3,3√3)
(-√3,-3√3)




$f(x) = -x^3 + 3x$

CURIOSITATS. REVISTA

Dirichlet



Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13/02/1805–5/5/1859) va ser un matemàtic alemany al què se li atribueix la definició "formal" moderna de *funció*.
Dirichlet va nàixer en Düren, on son pare era el cap de l'oficina de correus. Va ser educat en Alemanya i, després, a França, on va aprendre d'alguns dels més renombrats matemàtics de la seua època, relacionant-se amb alguns com Fourier.

Van ser estudiants seus Leopold Kronecker y Rudolf Lipschitz. Després de la seua mort, el seu amic i col·lega matemàtic Richard Dedekind va recopilar, va editar i publicar les seues lliçons i altres resultats en teoria de nombres.Una versió simple de la ***funció de Dirichlet*** es defineix com:

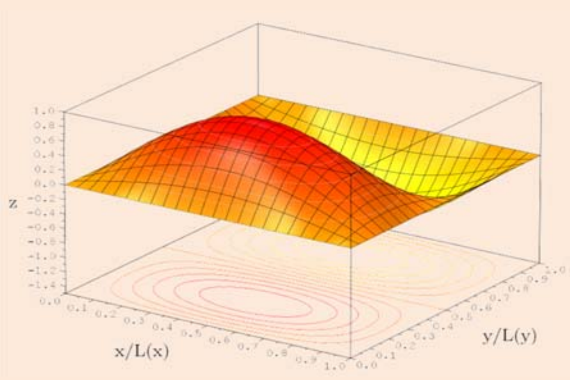
Nikki Grazziano: "Funcions i fotografia"

Nikki ha trobat una forma de reunir els seus dos interessos, matemàtiques i fotografies de la naturalesa, en una sèrie d'imatges anomenada **Found Functions** a les que superposa gràfiques generades mitjançant fórmules matemàtiques a fotografies preses per ella.
Però l'original és que no busca imatges que puguen adaptar-se a certes fórmules, sinó que quan té una fotografia que li agrada és quan busca i ajusta la fórmula necessària per a generar que la representació gràfica s'adapte.
Una curiosa forma d'aprendre matemàtiques i veure que tot es pot representar amb elles.

Si vols consultar més i veure les fotografies (que tenen copyright), visita la pàgina:

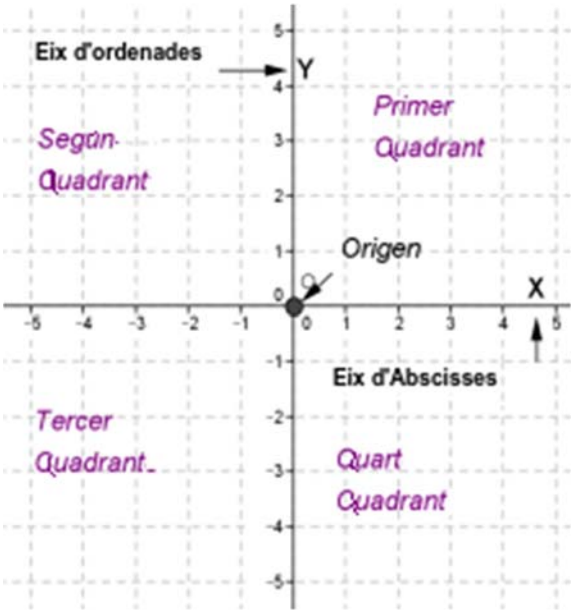
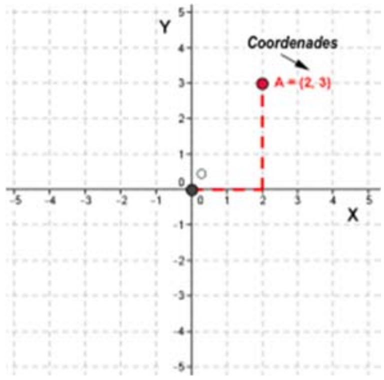
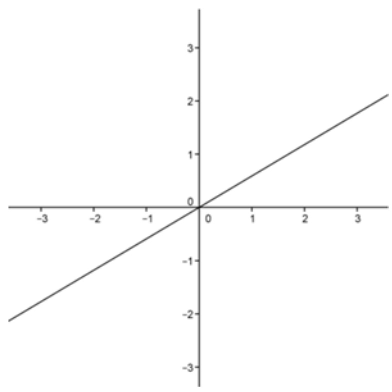
http://www.nikkigraziano.com/index.php/project/found-functions/

FUNCIONS 3D

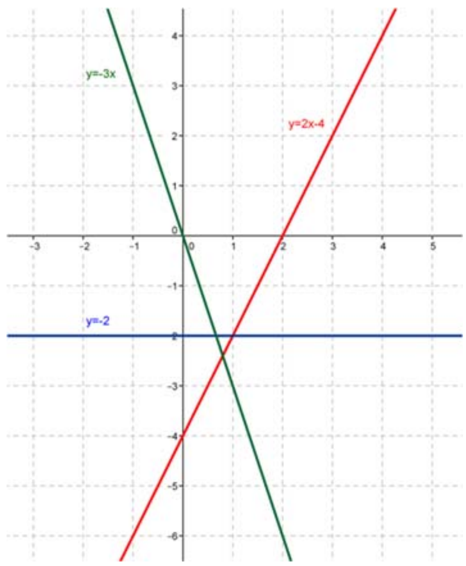
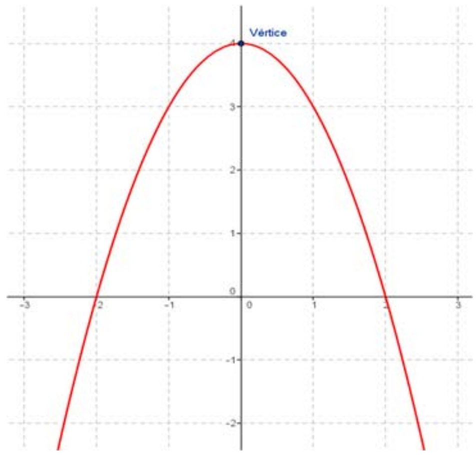
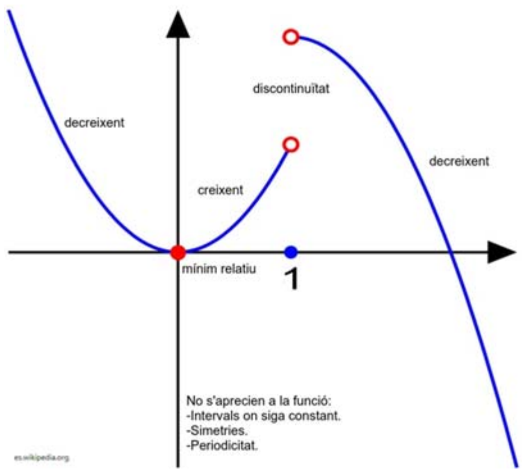


Quan la relació funcional s'estableix entre tres variables, la gràfica s'ha de fer en tres dimensions, la qual cosa la fa més complexa de representar però més cridanera. Els ordinadors són de gran ajuda per a fer-les i veure des de distints punts de vista. Serveixen per a realitzar models molt reals de multitud de situacions tridimensionals.

RESUM

CONCEPTES		*Exemples*
Aqueixos cartesians i coordenades d'un punt al pla		
Funció	Una **funció** és una relació entre dues magnituds de manera que a un valor qualsevol d'una (**variable independent**) li fem correspondre, com a màxim, un únic valor de l'altra (**variable dependent**).	$y = f(x) = \mathbf{0{,}59} \cdot x$ $f(2) = \mathbf{0{,}59} \cdot \mathbf{2} = \mathbf{1{,}18}$ $f(5) = \mathbf{0{,}59} \cdot \mathbf{5} = \mathbf{2{,}95}$
Gràfica d'una funció	La **gràfica d'una funció** és la representació al pla cartesià de tots els parells ordenats als que el primer valor correspon a un qualsevol de la variable independent i el segon al què s'obté en transformar-lo mitjançant la funció: $\{(x, y) \mid x \in \mathfrak{R}, y = f(x)\}$	*y* = *f*(*x*) = 0,59*x* {(2, 1'18), (5, 2'95),...}  *Gràfica:*

<table>
<tr><th colspan="2">CONCEPTES</th><th>Exemples</th></tr>
<tr><td>Funció afí, funció lineal i funció constant</td><td>Una funció afí és aquella funció en què la relació entre les dues variables ve donada per un polinomi de grau menor o igual a un: $y = f(x) = mx + n$.

La representació gràfica és una recta.
“m” rep el nom de pendent i “n” ordenada a l’origen.
Una funció lineal o de proporcionalitat directa és una funció afí amb ordenada a l’origen nul·la: $y = mx$ (passa per l’origen).
Una funció constant és una funció afí amb pendent nul: $y = n$ (sempre pren el mateix valor i la seua gràfica és una recta horitzontal).</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Funció quadràtica</td><td>Una funció quadràtica és aquella funció en què la relació entre les dues variables ve donada per un polinomi de grau dos:
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$.
La gràfica d’aquest tipus de funcions s’anomena paràbola.
El punt més significatiu de la paràbola és el vèrtex i es calcula donant-li a la variable independent el valor $x = {-b}/{2a}$.
Si el coeficient líder és positiu, el vèrtex és un mínim i, si és negatiu, un màxim.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Continuïtat
Monotonia
Extrems
Simetria
Periodicitat</td><td>Una funció pot ser contínua a un interval si la seua gràfica no pateix “ruptures” (anomenades discontinuïtats), creixent (decreixent) si el seu valor augmenta (disminueix) quan ho fa la variable independent, constant quan sempre pren el mateix valor, parell si la imatge de la variable independent coincideix amb el del seu oposat, imparell quan el valor de la funció per a l’oposat de la variable independent també és l’oposat i periòdica si les imatges dels valors obtinguts en sumar una quantitat fixa (període) a la variable independent coincideixen.</td><td>
</td></tr>
</table>

EXERCICIS I PROBLEMES

Sistemes de representació

1. Situa en un sistema de referència cartesià els punts següents, triant una escala als eixos que permeta dibuixar-los tots de forma còmoda: *A*(5,4); *B*(0,2); *C*(–2,0); *D*(3,–1,3); *E*(1’5,0); *F*(0,0); *G*(–1,–2/3). Assenyala en cada cas a quin quadrant pertany el punt o, si és el cas, en quin eix està.

2. Escriu les coordenades de tres punts situats al tercer quadrant.

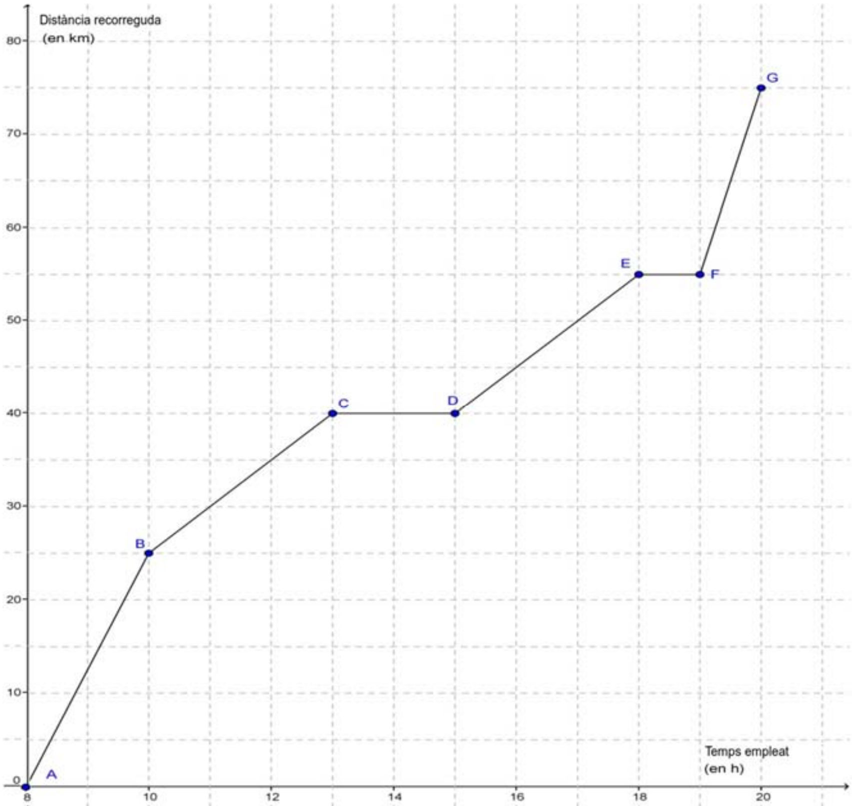
3. Situa en un sistema de referència cartesià els punts següents:

4. *A*(0, 4); *B*(0, 2’3); *C*(0, –2); *D*(0, –1). Què tenen en comú tots ells?

5. Escriu les coordenades i representa tres punts de l’eix d’ordenades. Què tenen en comú?

6. Dibuixa al teu quadern un triangle rectangle amb un catet igual a 3, i el vèrtex de l’angle recte a l’origen de coordenades. Indica les coordenades de tots els vèrtexs.

7. La següent gràfica resumeix l’excursió que hem realitzat per la serra de Guadarrama:



a) Quant temps va durar l’excursió?

b) Quant temps es va descansar? A quines hores?

c) Quants quilòmetres es van recórrer?

d) En quins intervals de temps se’n va anar més ràpid que entre les 11 i les 13 hores?

e) Fes una breu descripció del desenrotllament de l’excursió.

f) Construeix una taula de valors a partir dels punts assenyalats a la gràfica.

g) Si a l’eix d’ordenades representàrem la variable “distància al punt de partida”, seria la mateixa gràfica? Amb les dades que disposes, pots fer-la?

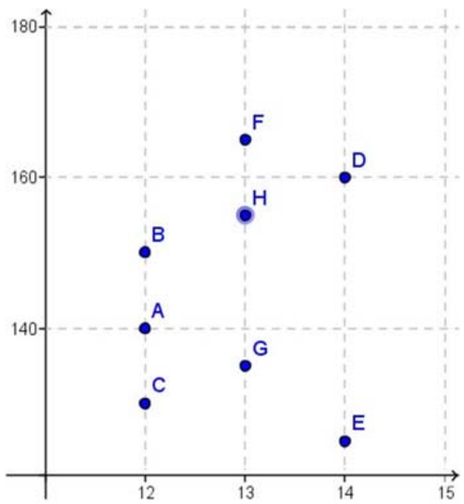
Autor: Paco Moya i Nieves Zuasti
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Funcions i tipus de funcions

8. Indica quins de les següents correspondències són funcions:

a) A cada nombre natural se li associen els seus divisors primers.
b) A cada circumferència del pla se li associa el seu centre.

9. L'altura i l'edat dels components d'un equip de bàsquet estan relacionats segons mostra la següent gràfica:



a) Si Joan té 14 anys, quina pot ser la seua altura?
b) Si Maria medeix 165 cm, quina pot ser la seua edat?
c) La relació entre l'altura i l'edat dels diferents components de l'equip, és una relació funcional? Per què?
d) I la relació entre l'edat i l'altura? Realitza una gràfica semblant a l'anterior per a representar aquesta situació.

10. La distància, *d*, recorreguda per un tren depén del nombre de voltes, *n*, que dóna cada roda de la locomotora.

a) Escriu la fórmula que permet obtindre *d* conegut *n*, sabent que el diàmetre de les rodes de la locomotora és de 78 cm.
b) Dibuixa la gràfica.
c) Quina distància haurà recorregut el tren quan la roda haja donat mil voltes? (pren com a valor de π el nombre 3,14).
d) Quantes voltes haurà donat la roda al cap de 7 km?

11. Un baló sonda utilitzat pel Servei Meteorològic dels Pirineus per a mesurar la temperatura a distintes altures porta incorporat un termòmetre. S'observa que cada 180 m d'altura la temperatura disminueix un grau. Un cert dia la temperatura en la superfície és de 9º C. Determina:

a) Quina temperatura hi haurà a 3 km d'altura?
b) A quina altura hi haurà una temperatura de −30º C?
c) Escriu una fórmula que permeta calcular la temperatura T coneixent l'altura A. Confecciona una taula i dibuixa la gràfica. Quin tipus de funció és?
d) Si la temperatura en la superfície és de 12º C, quin és aleshores la fórmula? Quin tipus de funció és?

12. Dibuixa la gràfica de la funció part entera: $y = E(x)$.

13. Un rectangle té un perímetre de 100 cm. Anomena x a la longitud d'un dels seus costats i escriu la fórmula que dóna l'àrea en funció de x. Dibuixa la seua gràfica. Quin tipus de funció és?

14. Una caixa quadrada té una alçària de 20 cm. Com depén el seu volum del costat de la base? Dibuixa la gràfica de la funció que resulta.

15. Amb un full de paper de 32 cm de llarg i 22 cm d’ample es retalla un quadrat de 2 cm de costat en cada uns dels cantons, es doblega i es construeix una caixa. Quin és el volum de la caixa? I si es retallen quadrats de 3 cm? Quin és el volum si el costat del quadrat retallat és x? Escriu la fórmula i dibuixa la gràfica.

16. Escriu l’equació de la recta paral·lela a $y = 4x + 2$ d’ordenada a l’origen 6.

17. Sense representar-los gràficament, estableix si estan alineats els punts $A(3, 4)$, $B(7, 9)$ i $C(13, 15)$

18. Una empresa de lloguer de vehicles ofereix dues fórmules diferents. Fórmula 1: El lloga per 300 euros al dia amb quilometratge il·limitat. Fórmula 2: El lloga per 200 euros al dia i 7 euros el quilòmetre. Volem fer un viatge de 10 dies i mil quilòmetres, quant ens costarà amb cada una de les fórmules? Com no sabem el quilometratge exacte que acabarem fent, ens interessa fer un estudi per a saber la fórmula més beneficiosa. Escriu les fórmules d’ambdues situacions i dibuixa les seues gràfiques. Raona, a partir de dites gràfiques, quina fórmula és més rendible segons el nombre de quilòmetres que anem a fer.

19. Es construeixen boies unint dos cons iguals per la base, sent el diàmetre de la base de 90 cm. El volum de la boia és funció de l’altura “*a*” dels cons. Si volem una boia per a assenyalar l’entrada de patinets ens basta amb una altura de 50 cm: quin volum tindrà? Si és per a vaixells majors es necessita una altura de 1,5 m: quin volum tindrà? Escriu l’expressió de la funció que calcula el volum en funció de l’altura. Dibuixa la seua gràfica.

20. Calcula el vèrtex, l’eix de simetria i els punts d’intersecció amb els eixos de les següents paràboles. Dibuixa les seues gràfiques.

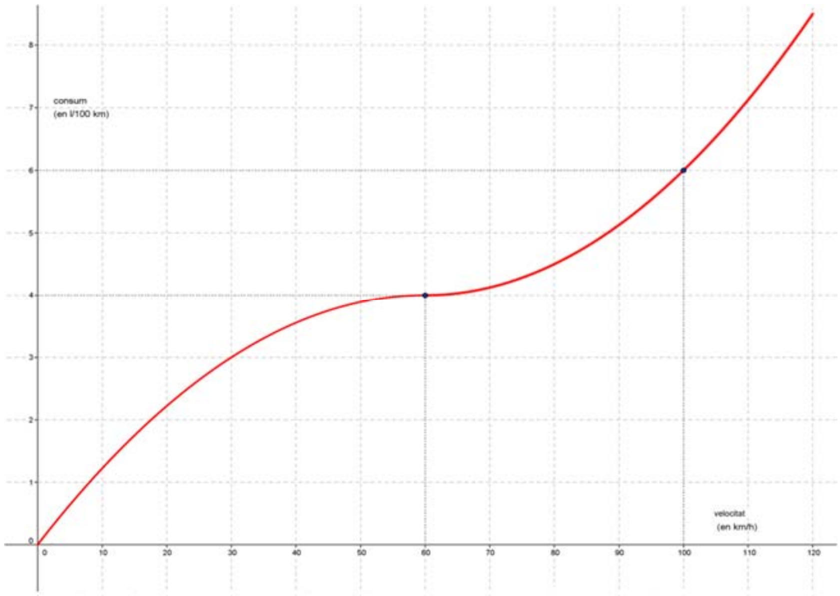
a) $y = x^2 + 8x - 13$ b) $y = -x^2 + 8x - 13$ c) $y = x^2 - 4x + 2$ d) $y = x^2 + 6x$ e) $y = -x^2 + 4x - 7$

21. Dibuixa la gràfica de $y = 2x^2$. Fes una plantilla. Determina el vèrtex de les següents paràboles i utilitza la plantilla per a dibuixar la seua gràfica:

a) $y = 2x^2 + 8x - 12$ b) $y = -2x^2 + 8x - 10$ c) $y = 2x^2 - 4x + 2$ d) $y = 2x^2 + 6x$

Ajuda: $2x^2 + 8x - 12 = 2(x^2 + 4x - 6) = 2((x + 2)^2 - 4 - 6) = 2((x + 2)^2 - 10)$. Vèrtex $(-2, -10)$

22. El consum de gasolina d’un cotxe per cada 100 km ve representat mitjançant la gràfica.:



és la variable dependent?
lependent?

ès el consum per a una velocitat de

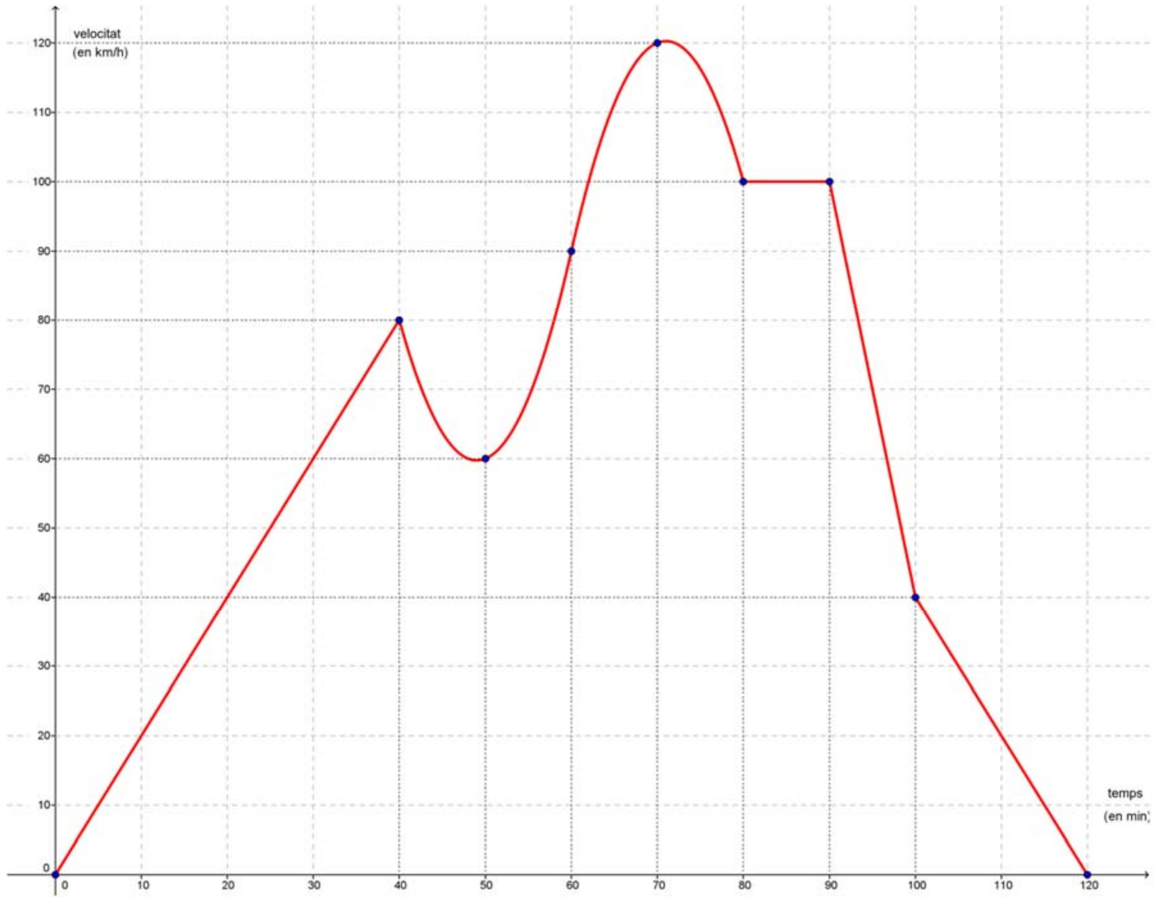
ıa velocitat el consum és de 5 l/100

a la gràfica per a explicar com
ısum de gasolina depenent de la
:otxe.

Característiques de les funcions.

23. Ximo ha arribat a un acord amb son pare per a rebre la seua paga. Cobrarà 20 euros al mes el primer any, i 5 euros més per cada any que passe. Quant li correspondrà d'ací a 7 anys? Fes una taula de valors i representa la seua gràfica. És contínua? Indica els punts de discontinuïtat i el seu tipus. Busca una fórmula que permeta calcular la paga quan hagen passat *n* anys.

24. Durant un viatge, la velocitat del cotxe varia depenent del tipus de carretera, de les condicions en què es troba, del temps meteorològic… La següent gràfica reflecteix la velocitat d'un vehicle en cada instant del trajecte que ha seguit.



cional la relació de dependència entre el temps i la velocitat?
és la variable independent? I la dependent?
ıa velocitat anava quan portava una hora de viatge? En quins moments anava a una velocitat de 40

els intervals en què la velocitat ha augmentat i disminuït. Ha sigut constant en algun moment? Quan?
temps?
ha sigut la velocitat màxima aconseguida al llarg de tot el viatge? En quin moment es va aconseguir? I
ıera hora del mateix?
ha sigut la velocitat mínima aconseguida al llarg de tot el viatge? Quan es va aconseguir? I entre la
hora i l'hora i mitja?

25. En entrar en l'aparcament d'un centre comercial trobem un rètol amb els preus que ens indiquen que 1 hora o fracció costa 1'20 € i les dues primeres hores són gratis per als clients amb targeta de compra del centre. Fes una taula que relacione el temps amb l'import pagat durant una jornada completa (12 hores) als casos d'un client amb targeta o sense ella. Esbossa la gràfica i contesta a les preguntes:

a) Quins valors pren la variable dependent? I la independent?
b) Pots unir els punts de la gràfica? Com s'ha de fer?
c) Hi ha punts de discontinuïtat? Si la resposta és afirmativa, assenyala'ls i explica el seu significat.

26. En estudiar el creixement d'una planta observem que durant els primers 30 dies ho fa molt de pressa, als 15 dies següents el creixement és més lent i després es manté amb la mateixa altura. Realitza un esbós de la gràfica que relaciona el temps amb l'altura aconseguida per la planta.

Si tenim més informació podem millorar l'esbós. Per exemple, fes la taula i la gràfica en el cas que el creixement de la planta s'ajuste a les següents fórmules (el temps s'expressa en dies i l'altura en centímetres):

a) Durant els primers 30 dies: altura = 4 x temps
b) Als 15 dies següents: altura = 90 + temps
c) A partir del dia 45: altura = 135.

27. Un viatge realitzat per un tren, en un cert interval del mateix, ve donat de la manera següent:

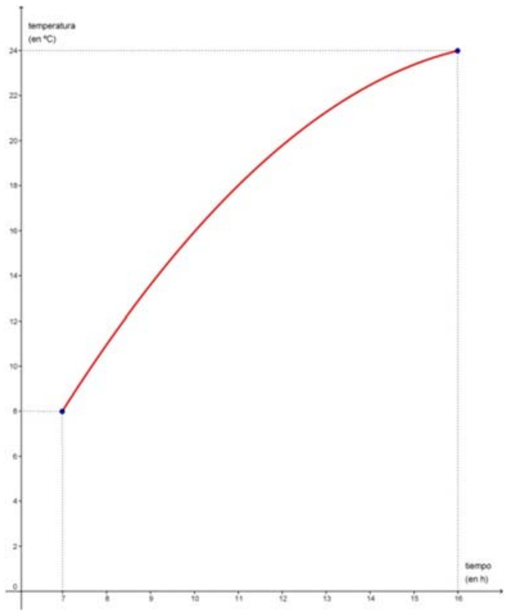
-Durant les dues primeres hores, la distància "*d*" (en quilòmetres) al punt de partida és 2·t+1, on "*t*" és el temps (en hores) de duració del trajecte.
-Entre la 2ª i 3ª hora, la dita distància ve donada per –*t* + 7.
-Entre la 3ª i 4ª hora, ambdues inclusivament, *d* = 4.
-Des de la 4ª i fins a la 6ª (inclusivament), la distància s'ajusta a 3·*t* - 8.

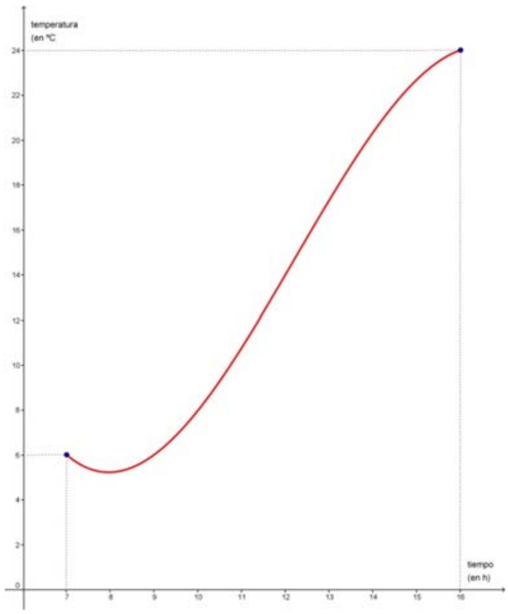
a) Realitza una taula i una gràfica que arreplegue el dit viatge de la manera més precisa possible (per a això has de calcular, com a mínim, els valors de la variable temps als instants 0, 2, 3, 4 i 6).
b) Explica si la relació anteriorment explicada entre la distància recorreguda i el temps tardat a recórrer-la és funcional.
c) La relació anterior, presenta alguna discontinuïtat?
d) En quin moment la distància al punt de partida és de 7 km?
e) Què indiquen els punts de tall de la gràfica amb els eixos?
f) Determina els intervals on la funció és creixent, decreixent i constant.
g) Troba els punts on la funció aconsegueix els seus màxims i mínims relatius i absoluts. Interpreta el significat que puguen tindre.

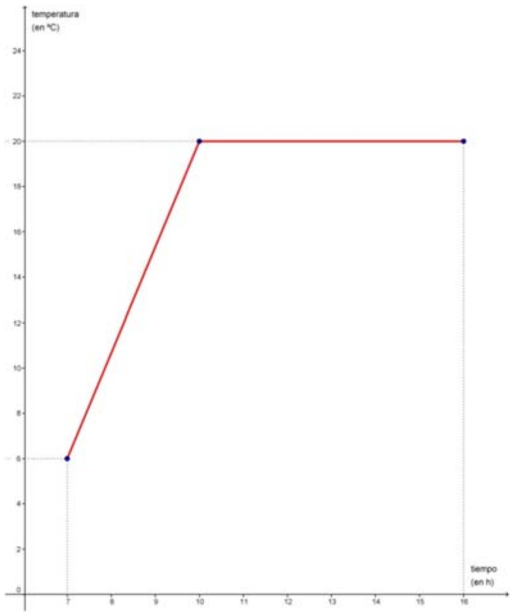
28. Representa gràficament les següents funcions, estudiant en ella totes les característiques que s'han treballat al tema: monotonia, extrems, simetria i periodicitat.

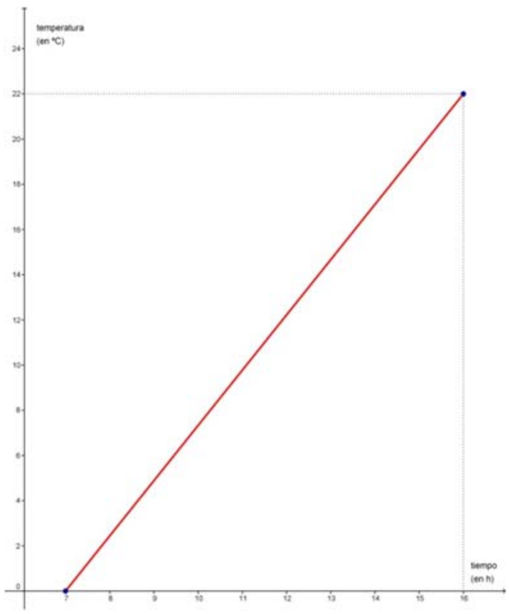
a) Valor absolut d'un nombre: f(x)=|x|.
b) Oposat i invers d'un nombre: $f(x) = \frac{-1}{x}$.
c) *Mantissa* (a cada nombre li fa correspondre la diferència entre el dit nombre i la seua part sencera): $M(x) = x - E(x)$.

29. Les gràfiques següents mostren l'evolució, un dia qualsevol, de la temperatura aconseguida entre les 7 del matí i les 4 de la vesprada en quatre ciutats (Madrid, Granada, Valladolid i Sevilla):









a) Estudia la monotonia de totes les gràfiques.

b) En alguna ciutat la temperatura s'ha mantingut constant durant tot l'interval? I en part d'ell?

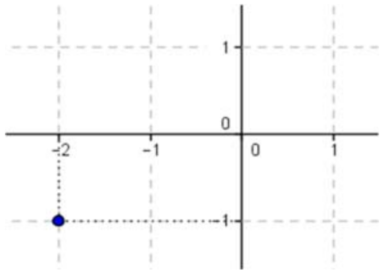
c) Quina ciutat creus que presenta un canvi de temperatura més suau al llarg de tot el matí?

d) Tenint en compte que a Madrid l'increment de la temperatura ha sigut sempre lineal, a Granada la temperatura mínima s'ha aconseguit després de les 7 h i a Valladolid a partir del mig dia la temperatura va baixar, indica quina gràfica correspon a cada una de les ciutats i explica quines han sigut les temperatures màximes i mínimes en cada una d'elles.

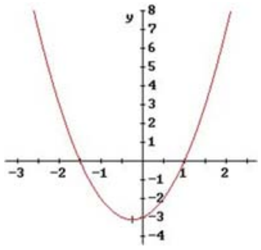
AUTOAVALUACIÓ

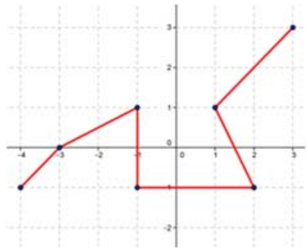
1. Les coordenades del punt assenyalat són:

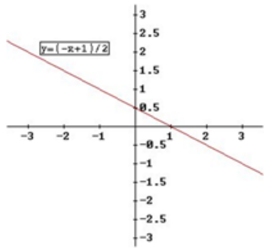
a) (–1, 2)
b) (–2, –1)
c) (1, 2)
d) (1, –2)

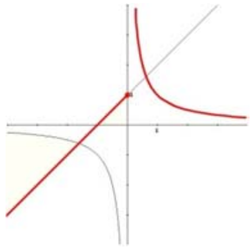


2. L'única gràfica que no correspon a una funció és:

a) 

b) 

c) 

d) 

3. L'única taula que no pot ser d'una relació funcional és:

a)

x	*y*
0	1
1	2
2	3
3	4

x	*y*
–1	–3
0	–3
1	–3
2	–3

x	*y*
–3	9
–1	1
0	0
2	4

x	*y*
0	2
1	3
4	6
0	3

ica funció afí que, a més, és lineal és:

a) y = –4x b) y = 3x + 1 c) y = –2x + 3 d) y = –x – 1

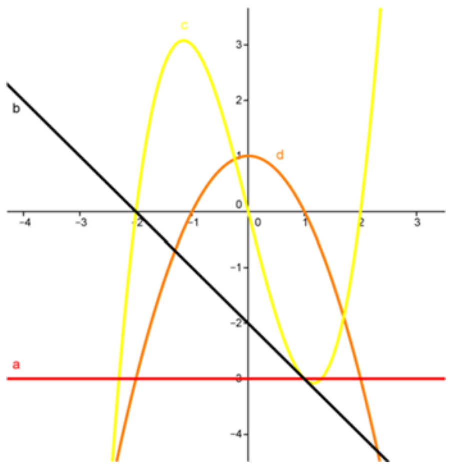
5. L'única gràfica d'una funció afí no constant és:

a)

b)

c)

d)



6. L'única funció quadràtica és:

a) $y = -2x$ b) $y = 3x + 1$ c) $-2x^2 + 3x$ d) $-x^3 - 1$

7. La funció quadràtica que té el seu vèrtex al punt (3, 4) és:

a) $-2x^2$ b) $y= 3x^2-x+1$ c) $-2x^2 + 3x$ d) $-x^2 +6x- 5$

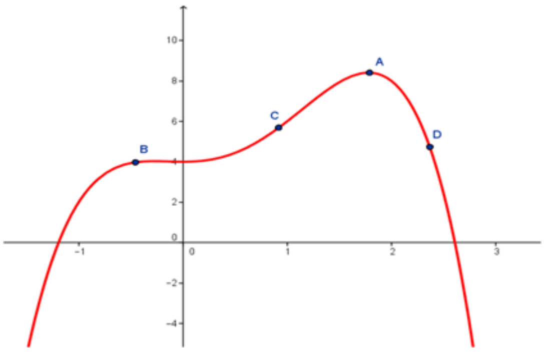
8. El màxim absolut de la funció s'aconsegueix al punt:

a)

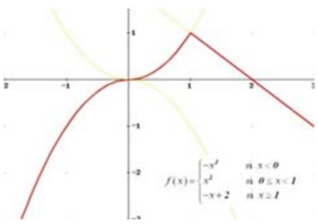
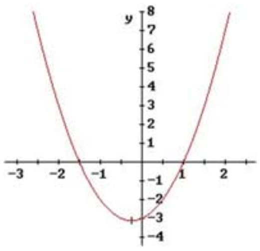
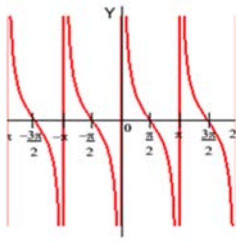
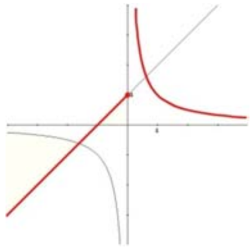
b)

c)

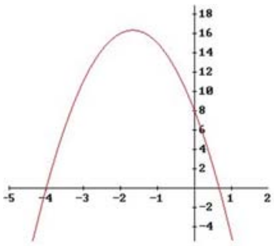
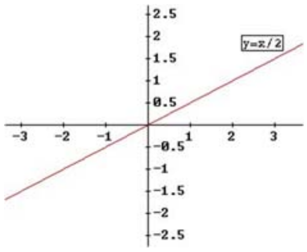
d)

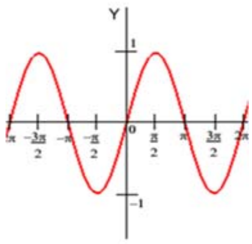


9. L'única gràfica que correspon a una funció periòdica és:

a)  b)  c)  d) 

10. L'única gràfica que correspon a una funció que és sempre creixent fins a $x = -2$ és:

a)  b) 

c)  d)