Matemàtiques orientades a les ensenyances aplicades:

4t A ESO
Capítol 1:
Nombres reals

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Paco Moya y Nieves Zuasti

Revisor: Javier Rodrigo y María Molero

Ilustraciones: Paco Moya y Banco de Imágenes de INTEF

Traducció al valencià: Pedro Podadera IES Juan de Garay

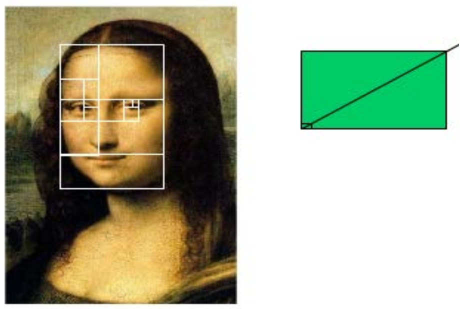
Índex

Resum

Ja coneixes els nombres naturals, els nombres enters i els nombres racionals. En aquest capítol estudiarem els nombres reals que estan formats pels nombres racionals i els irracionals.

Amb alguns nombres reals irracionals ja t'havies trobat, com amb$\sqrt{2}$, o amb π… Però hi ha molts, molts més. Hi ha molts més nombres irracionals que racionals. I et preguntaràs, com es pot dir això si són infinits? Resulta que hi ha uns infinits més grans que altres. A l'infinit dels nombres naturals se li denomina "infinit *numerable*". L'infinit dels nombres enters i dels números racionals també és "infinit *numerable*", però el dels nombres reals ja no és numerable, és molt major, se li denomina "*la potència del continu*".

El nombre d'or a la Gioconda



Una de les propietats més importants dels nombres reals és la seua relació amb els punts d'una recta, per la qual cosa aprendrem a representar-los a la recta "*real*" a la que no deixen "forats".

En aquest primer capítol repassarem moltes coses que ja coneixes, com les operacions amb els nombres, representar els nombres en una recta, les potències… Si tot això ho domines prou, el millor és que passes molt de pressa per ell, i dediques el teu temps a altres capítols que et resulten més nous. No obstant això, segur que hi ha xicotets detalls que sí que poden resultar-te nous, com per exemple que els nombres irracionals, junt amb els nombres racionals formen el conjunt dels *nombres reals*, i que a cada nombre real li correspon un punt de la recta (propietat que ja tenien els nombres racionals) i a cada punt de la recta li correspon un nombre real. Per això, a la recta numèrica l'anomenarem *recta real*.

Comencem amb un problema perquè mesures el que recordes sobre operacions amb fraccions:

Activitats proposades

1. *Les perles del rajà*: Un rajà va deixar les seues filles un cert nombre de perles i va determinar que es fera de la manera següent. La filla major prendria una perla i un setè del que quedara. La segona filla rebria dues perles i un setè del restant. La tercera jove rebria tres perles i un setè del que quedara. I així successivament. Feta la divisió cada una de les germanes va rebre el mateix nombre de perles. Quantes perles hi havia? Quantes filles tenia el rajà?

1. DISTINTS TIPUS DE NOMBRES

1.1. Operacions amb nombres enters, fraccions i decimals

Operacions amb nombres enters

Recorda que:

Els nombres **naturals** són: $\mathbb{N}$ **= {1, 2, 3….}**.

Hi ha ocasions de la vida quotidiana en què és necessari usar nombres diferents dels nombres naturals. Fixa't en aquests exemples:

Exemples:

- Si es tenen 20 € i es gasten 30 euros, es tindrà un deute de 10 euros, és a dir –10 €.
- Quan fa molt fred, per exemple 5 graus sota zero, s'indica dient que fa –5 ºC.
- En baixar en ascensor al soterrani 3, has abaixat al pis –3.

Els **nombres enters** són una ampliació dels **nombres naturals** ($\mathbb{N}$). Els nombres **enters positius** són els nombres naturals i s'escriuen precedits del signe +: +1, +2, +3, +4, +5… Els **enters negatius** van precedits del signe –: –1, –2, –3… El **zero** és l'únic nombre enter que no és ni negatiu ni positiu i no porta signe.

El conjunt dels nombres enters es representa per $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$ **= {…–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3…}.**

Recorda que:

Per a **sumar** (o restar) nombres enters podem sumar per un costat tots els nombres enters positius, i els negatius d'un altre, restant el resultat.

Exemple:

Si *a, b* i *c* són nombres enters llavors:

$$8ab^2c - 5ab^2c + 2ab^2c - 6ab^2c = 10ab^2c - 11ab^2c = -ab^2c$$

Per a **multiplicar** o dividir nombres enters es té en compte la regla dels signes.

Exemple:

$(+5) \cdot (+4) = +20 \quad (-3) \cdot (-5) = +15 \quad (+5) \cdot (-4) = -20 \quad (-6) \cdot (+5) = -30$

Activitats proposades

2. Realitza les operacions següents:

a) $+8 + (-1) \cdot (+6)$ b) $-6 + (-7) : (+7)$ c) $+28 - (-36) : (-9-9)$

d) $+11ab + (+7) \cdot (+6ab - 8ab)$ e) $-7a^2b - [+4a^2b - (-6a^2b) : (+6)]$ f) $+9 + [+5 + (-8) \cdot (-1)]$

3. Utilitza la jerarquia d'operacions per a calcular al teu quadern:

a. $6 \cdot (-5) - 3 \cdot (-7) + 20$ b. $-8 \cdot (+5) + (-4) \cdot 9 + 50$

c. $(-3) \cdot (+9) - (-6) \cdot (-7) + (-2) \cdot (+5)$ d. $-(-1) \cdot (+6) \cdot (-9) \cdot (+8) - (+5) \cdot (-7)$

Operacions amb fraccions

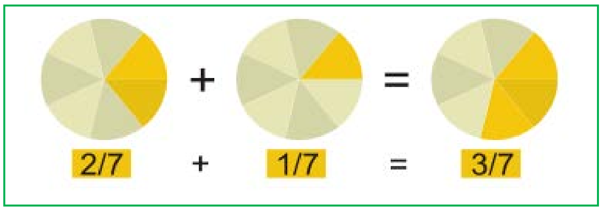
Recorda que:

Una ***fracció*** és una expressió de la forma $\frac{m}{n}$ on tant *m* com *n* són nombres enters. Per a referir-nos a ella diem *"m partit per n"*; *m* rep el nom de ***numerador*** i *n* el de ***denominador***.

Les fraccions el numerador de les quals és major que el denominador reben el nom de **fraccions impròpies**. Les fraccions el numerador de les quals és menor que el denominador reben el nom de **fraccions pròpies.**

Per a **sumar** o restar fraccions que tenen **el mateix denominador** es realitza la suma, o la resta, dels numeradors i es manté el mateix denominador.

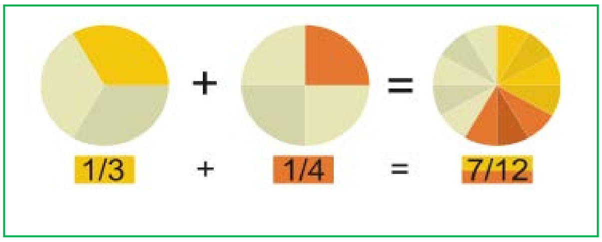
Per a sumar o restar fraccions amb **distint denominador**, es redueixen a comú denominador, buscant el mínim comú múltiple dels denominadors.



Exemples:

a) $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$



Els denominadors són diferents, 3 i 4. El seu mínim comú múltiple és 12. En dividir 12 entre 3 ens dóna 4 i en fer-ho entre 4 obtenim 3.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

Activitats proposades

4. Efectua les següents operacions amb fraccions:

a) $-\frac{5}{3}-\frac{7}{2}$ b) $\frac{4}{7}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-9)}{5}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{7}{2}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)$

e) $\left(\frac{7}{2}+\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{9}{8}$ f) $\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{8}\right)$ g) $\frac{15}{2}:\frac{5}{4}$ h) $\frac{6}{5}:\frac{1}{5}$ i) $15:\frac{3}{5}$

5. Simplifica les fraccions següents:

a) $\left(\frac{x-1}{2}+\frac{x+2}{3}\right)\cdot\frac{9}{x}$ b) $\frac{x+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x^2-6x+9}{x-3}:\frac{x-3}{x+2}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

Operacions amb expressions decimals

Una **expressió decimal** consta de dues parts: la seua **part entera**, el nombre que està a l'esquerra de la coma i la seua **part decimal**, allò que es troba a la dreta de la coma.

Observa que:

La coma es pot escriure dalt: 3'5, o baix: 3,5, i inclús als Estats Units s'utilitza un punt: 3.5. En aquest capítol escriurem la coma baix.

Per a **sumar o restar** expressions decimals, basta aconseguir que tinguen el mateix nombre de xifres decimals.

Exemple:

a) 24,7 + 83,15 – 0,05 = 24,70 + 83,15 – 0,05 = 107, 80 b) 53,39 – 56 + 0,06 = 53,45 – 56,00 = –2,55

Per a **multiplicar** dues expressions decimals, es multipliquen ignorant la coma que posseeix cada una d'elles. Al resultat d'aqueix producte se li posa una coma perquè sorgisca una expressió decimal amb una part decimal de longitud igual a la suma de les quantitats de xifres decimals que tenen les expressions decimals multiplicades.

Exemple:

$$5{,}7a \cdot 3{,}2a \cdot 7{,}14a = 130{,}2336a^3$$

Per a **dividir** expressions decimals igualem el nombre de xifres decimals d'ambdós nombres, i després dividim.

Exemple:

$$\frac{9{,}3}{4'81}=\frac{9{,}30}{4'81}=\frac{930}{481}=1{,}9$$

Activitats proposades

6. Realitza les operacions:

a) $31{,}3+5{,}97$ b) $3{,}52\cdot 6{,}7$ c) $11{,}51-4{,}8$ d) $19{,}1-7{,}35$

e) $4{,}32+32{,}8+8{,}224$ f) $46{,}77-15{,}6+2{,}3$ g) $1{,}16\cdot 3{,}52$ h) $3{,}2\cdot 5{,}1\cdot 1{,}4$

i) $2{,}3\cdot 4{,}11\cdot 3{,}5$ j) $4\cdot(3{,}01+2{,}4)$ k) $5{,}3\cdot(12+3{,}14)$ l) $3{,}9\cdot(25{,}8-21{,}97)$

1.2. Nombres racionals. Fraccions i expressions decimals

Tota expressió decimal exacta, o periòdica, es pot posar com a fracció.

Una expressió **decimal exacta** es converteix en la fracció el numerador de la qual coincideix amb el nombre decimal, després d'eliminar la coma, i el denominador és el nombre 1 seguit de tants zeros com a xifres tenia la part decimal del nombre en qüestió.

Exemple:

$$93{,}15 = 93 + \frac{15}{100} = \frac{9315}{100}$$

Per a escriure en forma de fracció una expressió **decimal periòdica**, com per exemple N = 1,725252525…, hem d'aconseguir dos nombres amb la mateixa part decimal perquè en restar desapareguen els decimals:

$$N = 1{,}7252525\ldots$$
$$1000N = 1725{,}2525\ldots$$
$$10N = 17{,}2525\ldots$$
$$Sirestem{:}\, 990N = 1708 \Rightarrow N = \frac{1708}{990} = \frac{854}{495}$$

Per fer això multipliquem a N de manera que la coma quede després del primer període, en aquest cas després de 1725. També multipliquem a N de manera que la coma quede al principi del primer període, en aquest cas darrere de 17. Ara 1000N i 10N tenen la mateixa part decimal (infinita) que si restem desapareix, i podem aïllar N.

Activitats proposades

7. Escriu en forma de fracció les següents expressions decimals i redueix-les. Comprova amb la calculadora que està bé:

a) 7,92835; b) 291,291835; c) 0,23; d) 2,353535…..

e) 87,2365656565….; f) 0,9999…..; g) 26,5735735735…..

Totes les fraccions tenen expressió decimal exacta, o periòdica.

Recorda que:

Si el denominador (de la fracció irreductible) només té com a factors primers potències de 2 o 5 la seua expressió decimal és exacta.

Exemple:

- $\frac{1}{2^3 \cdot 5} = 5^2 \cdot 10^{-3} = 0{,}025; jaque \frac{10^3}{2^3 \cdot 5} = 5^2$i açò és general ja que sempre hi haurà una potència de 10 que siga múltiple del denominador si aquest només conté doses o cincs. Fixa't que el nombre de decimals és el major dels exponents de 2 i 5.

Si el denominador (de la fracció irreductible) té algun factor primer que no siga 2 ni 5 la fracció tindrà una expressió decimal periòdica.

Exemple:

- Si dividim 1 entre 23 obtenim un primer residu que és 10, després un altre que és 8 i seguim, però, es repetirà alguna vegada el residu i per tant les xifres del quocient? La resposta és que sí, segur que sí, els residus són sempre menors que el divisor, en aquest cas de l'1 al 22, si jo obtinc 22 residus distints (com és el cas) en traure un més ha de repetir-se!, és l'anomenat *Principi de les caselles (o del Palomar N.del T.)*. I a partir d'ací els valors del quocient es repeteixen. Per tant l'expressió decimal és periòdica i el nombre de xifres del període és com a màxim una unitat inferior al denominador (no sempre ocorre açò però 1/23 té un període de 22 xifres, 1/97 el té de 96 xifres, no obstant això 1/37 té un període de només 3 xifres.

S'anomenen **nombres racionals** a aquells l'expressió decimal dels quals és finita o periòdica, i se'ls representa per Q. Acabem de veure que es poden escriure en forma de fracció pel que es pot definir el conjunt dels nombres racionals com:

$$\mathrm{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}.$$

Per què imposem que el denominador siga diferent de zero? Observa que no té sentit una fracció de denominador 0.

Activitats proposades

8. Mentalment decideix quins de les següents fraccions té una expressió decimal exacta i quines la tenen periòdica.

a) 1/3 b) 7/5 c) 11/30 d) 3/25 e) 9/8 f) 7/11

9. Calcula l'expressió decimal de les fraccions de l'exercici anterior i comprova si la teua deducció era correcta.

1.3. Nombres irracionals. Expressió decimal dels nombres irracionals

Hi ha altres nombres l'expressió decimal dels quals és infinita no periòdica. Ja coneixes alguns: π,$\sqrt{2}$… Quan els grecs van demostrar que existien nombres com$\sqrt{2}$, o com el nombre d'or, que no es podien posar en forma de fracció i que tenien, per tant, infinites xifres decimals no periòdiques, els va parèixer una cosa insòlita. Per això aquests nombres van rebre aqueix estrany nom de "*irracionals*". No els podien entendre dins de la seua filosofia. L'interessant és que hi ha una longitud que mesura exactament$\sqrt{2}$, que és la diagonal de quadrat de costat 1, o la hipotenusa del triangle rectangle isòsceles de catets 1.

El mètode per a demostrar que$\sqrt{2}$no es pot escriure en forma de fracció es denomina "reducció a l'absurd" i consisteix a suposar que sí es pot, i arribar a una contradicció. Aquest procediment serveix igual per a totes **les arrels no exactes**, com amb$\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$, …

Però no val per a tots els irracionals. Per a demostrar que π és un nombre irracional cal estudiar molt. Està relacionat amb l'interessant problema de la quadratura *del cercle*. Va ser demostrat a finals del segle XVIII per Lambert. Fins a aqueix moment encara es continuaven calculant decimals per a trobar un període que no té.

Aquests nombres l'expressió decimal dels quals és infinita i no periòdica es denominen **números irracionals**.

S'anomenen **nombres reals** al conjunt format pels nombres racionals i els nombres irracionals.

Amb aquests nombres tenim resolt el problema de poder mesurar qualsevol longitud. Aquesta propietat dels nombres reals es coneix amb el nom de *completesa*.

A cada nombre real li correspon un punt de la recta i a cada punt de la recta li correspon un nombre real.

Observa que també a cada nombre racional li correspon un punt de la recta, però no al contrari, perquè $\sqrt{2}$ és un punt de la recta que no és racional.

Activitats proposades

10. Dibuixa un segment de longitud $\sqrt{2}$. El Teorema de Pitàgores pot ajudar-te, és la hipotenusa d'un triangle rectangle isòsceles de catets 1. Mesura'l amb un regle. La seua longitud no és 1,4, perquè $(1,4)^2$ és diferent de 2; no 1,41 perquè $(1,41)^2$ és diferent de 2; ni 1,414, perquè $(1,414)^2$ és diferent de 2; i no obstant això $(\sqrt{2})^2 = 2$.

11. Troba l'expressió decimal aproximada de $\sqrt{2}$. Hem vist que no és un nombre racional, per la qual cosa no pot tindre una expressió decimal finita, o periòdica, de manera que la seua expressió decimal té infinites xifres que no es repeteixen periòdicament. I no obstant això has pogut dibuixar-lo exactament (bé com a la diagonal del quadrat de costat 1, o com la hipotenusa del triangle rectangle isòsceles de catets 1).

1.4. Distints tipus de nombres

Ja coneixes distints tipus de nombres:

Naturals ➔ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Són els nombres que s'usen per a comptar i ordenar. El 0 no sol considerar-se un nombre natural.

Enters ➔ $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Són els nombres naturals, els seus oposats i el zero. No tenen part decimal, d'ací el seu nom. Inclouen als Naturals.

Notació:

$\in$ vol dir "pertany a"

$\cup$ vol dir "unió"

$\subset$ vol dir "inclòs en"

$\cap$ vol dir "intersecció"

Als nombres que es poden expressar en forma de quocient de dos nombres enters se'ls denomina nombres racionals i se'ls representa per la lletra Q. Per tant

Racionals ➔ $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$

Els nombres racionals inclouen als Enters.

També contenen als nombres que tenen expressió decimal exacta (0,12345) i als que tenen expressió decimal periòdica (7,01252525…) perquè poden escriure's en forma de fracció.

Els nombres com $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π… són els **nombres irracionals**, i tenen una expressió decimal infinita no periòdica. Junt amb els nombres racionals formen el conjunt dels nombres reals. Per tant

Irracionals ➔ $\mathrm{I} = \Re - \mathbb{Q}$.

Són nombres irracionals aquells nombres que **no** poden posar-se com a fracció de nombres enters. Hi ha més del que podria parèixer (de fet hi ha més que racionals ¡!), són tots aquells que tenen una expressió decimal que no és exacta ni periòdica, és a dir, **infinites xifres decimals i sense període.** **Exemples**: 17,6766766676… que me l'acabe d'inventar o 0,1234567891011… que se'l va inventar Carmichael. Inventa't u, busca en Internet i si no el trobes, doncs és teu (per ara ☺)

Reals ➔ $\Re = \mathrm{Q} \cup \mathrm{I}$.

És la unió dels nombres racionals i dels irracionals.

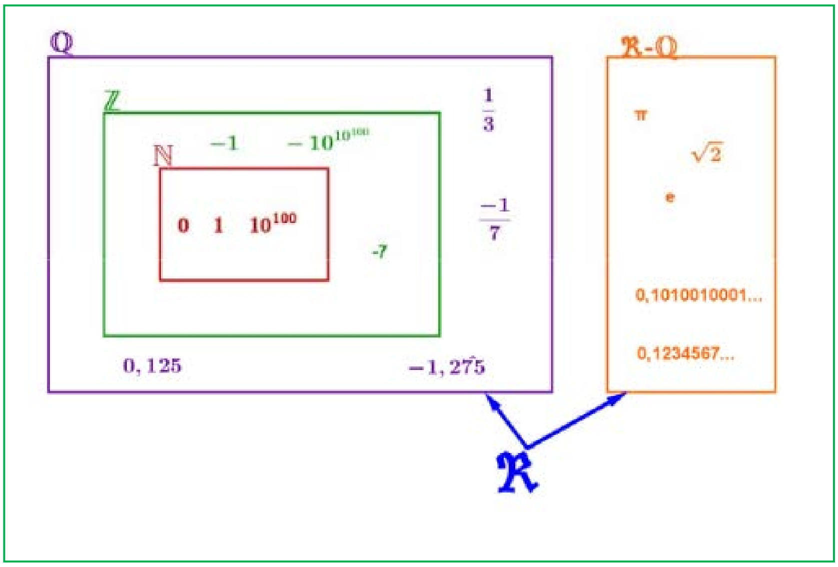
Tenim per tant que:

$$\mathrm{N} \subset \mathrm{Z} \subset \mathrm{Q} \subset \Re.$$

$$\mathrm{I} \subset \Re$$

Són aquests tots els nombres?

No, els reals formen part d'un conjunt més ampli que és el dels Nombres Complexos C (en 1r de batxillerat s'estudien en l'opció de Ciències).

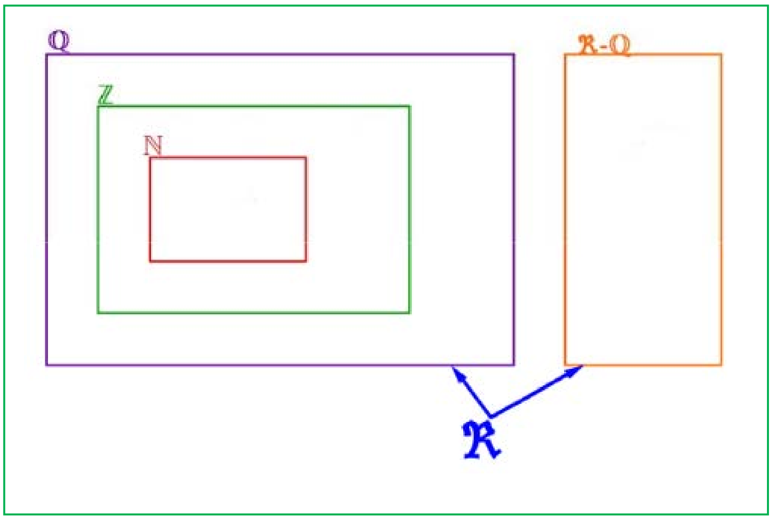


Activitats proposades

12. Copia al teu quadern la taula adjunta i assenyala amb una X a quins conjunts pertanyen els nombres següents:

Nombre	N	Z	Q	I	$\Re$
−7,63					
$\sqrt[3]{-8}$					
0,121212…					
π					
1/2					
1,99999…					

13. Copia al teu quadern l'esquema següent i col·loca els nombres de l'exercici anterior al seu lloc:



14. Pots demostrar que 4,99999… = 5?, quant val 2,5999…? Escriu-los en forma de fracció.

15. Quantes xifres pot tindre com a màxim el període de $\frac{1}{53}$?

2. POTÈNCIES

2.1. Repàs de les potències d'exponent natural

Recorda que:

Per a calcular la **potència** d'exponent un nombre natural i de base un nombre qualsevol es multiplica la base per si mateixa tantes vegades com indique l'exponent.

Exemples:

a) $(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$

b) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

c) $(1/2)^3 = (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2) = 1/8$

d) $(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 = 4$

Convé tindre en compte algunes particularitats que ens ajuden a abreviar el càlcul:

Les potències de **base negativa** i exponent **parell** són nombres positius.

Les potències de **base negativa** i exponent **imparell** són nombres negatius

$(-2)^2 = +4$

$(-2)^3 = -8$

Exemples:

$(-5)^2 = +25$

$(-5)^3 = -125$

Activitats proposades

16. Calcula:

a) $1)^{7345}$ b) $(-1)^{7345}$ c) $(-4)^2$ d) $(-4)^3$ e) $(1/2)^3$ f) $(\sqrt{2})^6$

2.2. Potències d'exponent fraccionari

Si l'exponent és, per exemple, –2, no sabem multiplicar una cosa *menys dues vegades*. Tampoc sabem multiplicar una cosa per si mateix *zero vegades*. Ara la definició anterior no ens serveix. Les definicions que es van a donar mantindran les propietats que coneixem de les operacions amb potències d'exponent natural, que continuaran sent vàlides.

Es defineix: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ i es defineix $a^0 = 1$

En efecte, $\dfrac{a^3}{a^3} = 1$ i $\dfrac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. Perquè continuen verificant-se les propietats de les operacions amb potències es defineix $a^0 = 1$.

Recorda

Sempre es verifica que:

$\boldsymbol{b^m \cdot b^n = b^{m+n}}$

$\boldsymbol{c^m : c^n = c^{m-n}}$

$\boldsymbol{((d)^m)^n = d^{m \cdot n}}$

També, $\dfrac{a^3}{a^5} = \dfrac{1}{a^2}$ i $\dfrac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}$. Perquè continuen verificant-se les propietats de les operacions amb potències es defineix $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Activitats proposades

17. Expressa com a única potència:

a) $(-4/3)^3 \cdot (-4/3)^2 \cdot (-4/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} \cdot (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(5/4)^8 \cdot (-2/3)^8 \cdot (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} \cdot (-5/4)^{-4}$

18. Calcula: a) $(-3/5)^{-4}$ b) $(-4/7)^{-2}$ c) $\dfrac{(7^4 \cdot (-2)^4 \cdot 3^4)^3}{(9^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \frac{4^5}{9^5}}{(-2) \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-9}{6}\right)^3}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^6}$

2.3. Operacions amb radicals

L'arrel n-èsima d'un nombre *a* és un nombre *x* que en elevar-lo a *n*, dóna com resultat *a*.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a.$$

L'**arrel quadrada** d'un nombre real no negatiu *a és* un *únic* nombre no negatiu *x* que elevat al quadrat ens dóna *a*:

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a, \; a \geq 0, x \geq 0.$$

Observa que $\sqrt{-1}$ no existeix al camp real. Cap nombre real en elevar-lo al quadrat dóna un nombre negatiu. Només podem calcular arrels d'exponent parell de nombres positius. No obstant això $\sqrt[3]{-1} = -1$ sí que existeix, perquè $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$.

Observa que: $(x^{\frac{1}{n}})^n = x^{\frac{n}{n}} = x$, pel que es defineix:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Exemple:

- $5^{2/3} = \sqrt[3]{5^2}$

Podem **operar** amb radicals utilitzant les mateixes propietats de les potències d'exponent fraccionari.

Exemple:

- $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
- $\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}} = \dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \dfrac{2}{3}$
- $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$
- $x^{2/3} \cdot y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 \cdot y}$

Recorda

Hi ha operacions amb radicals que **NO** estan permeses.

$10 = \sqrt{100} = \sqrt{64 + 36}$ que es distinto de:

$\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14.$

- $\dfrac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{5}{3}}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[3]{x^5}} = \dfrac{x \cdot \sqrt[4]{x^3}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$

De vegades és possible **extraure factors** d'un radical.

Exemple:

- $\sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$
- $\sqrt{2^4 \cdot 3^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 12 \cdot \sqrt{15}$

Activitats proposades

19. Simplifica els radicals $\sqrt[4]{3^{12}}$, $\sqrt[10]{9^{15}}$ usant potències d'exponent fraccionari.

20. Calcula $\sqrt{484}$ i $\sqrt[3]{8000}$ factorizant prèviament els radicands

21. Calcula i simplifica: $\sqrt{3}(12\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3})$

22. Calcula $25^{0,5}$; $64^{\frac{3}{5}}$ i $(7^{\frac{6}{5}})^{\frac{5}{2}}$

23. Expressa en forma de radical: a) $(-5)^{4/5}$ b) $27^{1/3}$ c) $7^{2/3}$

2.4. Notació científica

Un nombre expressat en **notació científica** està format per un nombre decimal la part entera del qual està entre 1 i 9, multiplicat per 10^n, sent n un nombre enter positiu o negatiu.

$$a \cdot 10^n \quad \text{sent} \quad 1 \le a \le 9$$

Si l'exponent ***n* és positiu** s'utilitza per a expressar nombres grans i si l'exponent ***n* és negatiu** per a expressar nombres xicotets

Exemple:

- $7810000000000 = 7,81 \cdot 10^{12}$ $\qquad$ $0,000000000038 = 3,8 \cdot 10^{-11}$
- $500.000 = 5 \cdot 10^5$ $\qquad$ $0,00002 = 2 \cdot 10^{-5}$
- Hi ha galàxies que estan a 200.000.000.000.000 km de nosaltres, i ho escrivim $2 \cdot 10^{14}$
- La massa d'un electró és aproximadament de 0,000000000000000000000000000911 grams, que s'escriu com $9,11 \cdot 10^{-28}$

Activitats resoltes

- A la llegenda dels escacs utilitzem nombres molt grans. Si no ens interessa tanta aproximació sinó fer-nos una idea únicament de com és de gran, podem usar la notació científica.

  Una aproximació per al nombre de grans de blat de la casella 64 és $9 \cdot 10^{18}$, amb la qual cosa ens fem una idea millor de l'enorme que és que amb el nombre: 9223372036854775808922337203685477580 8 que dóna un poc de mareig.

- Escriu en notació científica: 2^{16}, 2^{32} i 2^{64}

$2^{16} = 65536 \approx 6,5 \cdot 10^4$

$2^{32} = 4294967296 \approx 4,29 \cdot 10^9$

$2^{64} = 18446744073709551616 \approx 1,8 \cdot 10^{19}$

Activitats proposades

24. Escriu en notació científica:

a) 400.000.000 b) 45.000.000 c) 34.500.000.000.000 d) 0,0000001 e) 0,00000046

Operacions amb notació científica

Per a realitzar **sumes i restes**, amb expressions en notació científica, es transforma cada expressió decimal de manera que s'igualen els exponents de 10 en cada un dels termes

Exemple:

- Per a calcular $4 \cdot 10^8 + 2,3 \cdot 10^6 - 6,5 \cdot 10^5$ expressem tots els sumands amb la mateixa potència de 10, triant la menor, en aquest cas 10^5: $4000 \cdot 10^5 + 23 \cdot 10^5 - 6,5 \cdot 10^5$. Traiem factor comú: $10^5 \cdot (4000 + 23 - 6,5) = 4016,5 \cdot 10^5 = 4,0165 \cdot 10^8$

El **producte** (o el **quocient**) de dues expressions en notació científica és el resultat de multiplicar (o de dividir) els nombres decimals i sumar (o restar) els exponents de base 10.

Exemple:

- $2,5 \cdot 10^5 \cdot 1,36 \cdot 10^6 = (2,5 \cdot 1,36) \cdot 10^{5+6} = 3,4 \cdot 10^{11}$
- $5,4 \cdot 10^9 : 4 \cdot 10^7 = (5,4 : 4) \cdot 10^{9-7} = 1,35 \cdot 10^2$
- Per a fer el quocient per a calcular 2^{63} dividint 2^{64} entre 2 en notació científica:

  $2^{63} = 2^{64} / 2 = 1,8 \cdot 10^{19} / 2 = 0,9 \cdot 10^{19} = 9 \cdot 10^{18}$.

Usa la calculadora

Les calculadores utilitzen la notació científica. Moltes calculadores per a escriure $9 \cdot 10^{18}$ escriuen 9e+18.

Activitats proposades

25. Utilitza la teua calculadora per a obtindre 2^{16}, 2^{32} i 2^{64} i observa com dóna el resultat.

26. Utilitza la calculadora per a obtindre la teua edat en segons en notació científica.

27. Efectua les operacions en notació científica:

a) $0,000481 + 2,4 \cdot 10^{-5}$ b) $300000000 - 5,4 \cdot 10^6 + 7,2 \cdot 10^5$

c) $(2,9 \cdot 10^5) \cdot (5,7 \cdot 10^{-3})$ d) $(3,8 \cdot 10^{-8}) \cdot (3,5 \cdot 10^6) \cdot (8,1 \cdot 10^{-4})$

e) $(4,8 \cdot 10^{-8}) : (3,2 \cdot 10^{-3})$ f) $(6,28 \cdot 10^{-5}) \cdot (2,9 \cdot 10^2) : (3,98 \cdot 10^{-7})$

3. REPRESENTACIÓ A LA RECTA REAL DELS NOMBRES REALS

3.1. Representació de nombres enters i racionals

Recorda que:

Per a representar un nombre enter a la recta numèrica es traça una recta horitzontal en què es marca el zero, que es denomina origen, i es marca l'1. Es divideix la recta en segments iguals, de longitud 1. Es representen els nombres positius a partir del zero a la dreta i els nombres negatius a partir del zero a l'esquerra.

–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4

D'aquesta manera queden ordenats els nombres enters. Com més a la dreta estiga un nombre situat a la recta numèrica és major, i com més a l'esquerra estiga situat és menor.

Exemple 6:

- Representa en una recta numèrica i ordena els nombres enters següents:

–2, 0, 4, –1, 8, –7, –3 i 1

–8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Orde de menor a major: –7 < –3 < –2 < –1 < 0 < 2 < 4 < 8.

Orde de major a menor: 8 > 4 > 2 > 0 > –1 > –2 > –3 > –7.

Activitats proposades

28. Representa en una recta numèrica al teu quadern els següents nombres i ordena'ls de menor a major: –9, 7, 6, –5, 9, –2, –1, 1 i 0.

29. Representa en una recta numèrica al teu quadern els següents nombres i ordena'ls de major a menor: +1, –4, –8, +9, +4, –6, –7

30. *Pitàgores* va viure entre el 569 a. C. i el 475 anys a. C. i *Gauss* entre el 1777 i el 1855, quina diferència de segles hi ha entre ambdós dates?

31. Representa gràficament i ordena en sentit creixent, calcula els oposats i els valors absoluts dels següents nombres enters: 10, −4, −7, 5, −8, 7, −6, 0, 8.

Per a representar una fracció en la recta numèrica:

Distingim entre fraccions pròpies i impròpies.

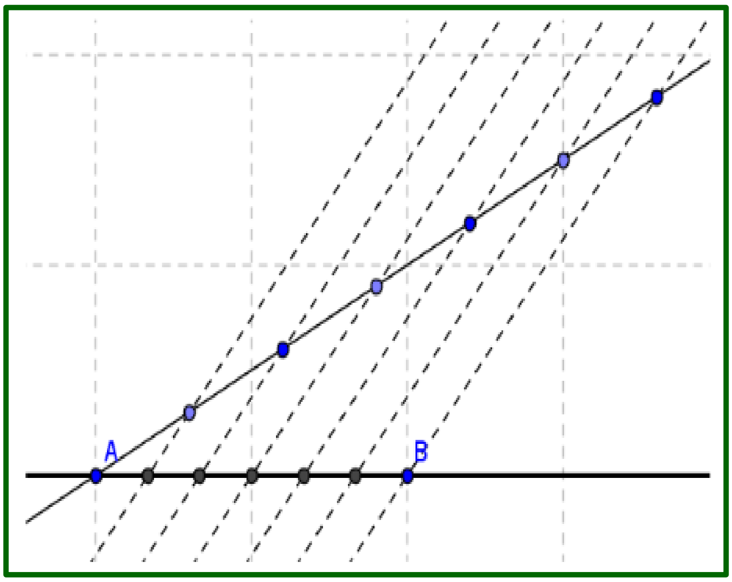
En qualsevol cas hem de recordar com es divideix un segment en parts iguals.

Activitats resoltes

- Si la fracció és **pròpia** (numerador menor que el denominador, valor menor que 1), per exemple $\frac{5}{6}$bastarà de dividir la primera unitat en 6 parts iguals i prendre 5. En cas de ser negativa comptarem cap a l'esquerra. (Veure figura)

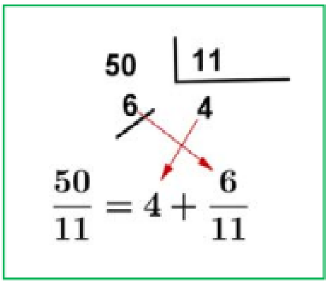
Dividir un segment en parts iguals

Per a dividir el segment AB en per exemple 6 parts iguals, tracem per A una línia auxiliar obliqua qualsevol, obrim el compàs una obertura qualsevol i marquem 6 punts en la recta anterior a distància igual. Unim l'últim punt amb B i tracem paral·leles que passen pels punts intermedis de la recta obliqua. Pel *Teorema de Tales*, el segment AB ha quedat dividit en 6 parts iguals. Per a representar 5/6, prenem 5 d'aqueixes parts.



Normalment no t'exigiran que ho faces tan exacte, ho faràs de forma aproximada, però vés en compte en què les parts pareguen iguals.

- Si la fracció és **impròpia** (numerador major que denominador i per tant valor major que 1) farem la divisió entera (sense decimals) quedant-nos amb el quocient i el residu. Açò ens permet posar-la en forma mixta (suma d'un enter i una fracció pròpia). Així per exemple: $\frac{50}{11} = 4 + \frac{6}{11}$ja que en dividir 50 entre 11 obtenim 4 de quocient i 6 de resta. *El quocient és la part entera i el residu el numerador de la fracció pròpia*.

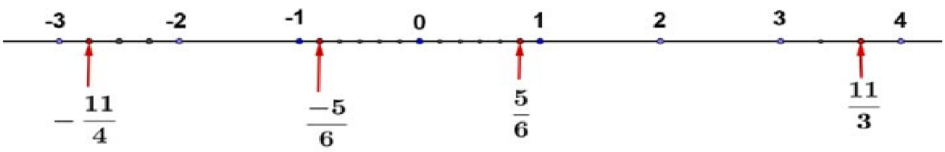


Per a representar-la només ens hem d'anar on diu la part entera (4) i la unitat següent (la que va del 4 al 5) la dividim en 11 parts iguals i prenem 6.

- Un altre exemple:$\frac{17}{7} = 2 + \frac{3}{7}$, perquè la divisió dóna 2 de quocient i 3 de residu.

Ens n'anem al 2, dividim la unitat següent (del 2 al 3) en 7 parts iguals i prenem 3.

- **En cas de ser negativa**: $-\frac{11}{4} = -\left(2 + \frac{3}{4}\right) = -2 - \frac{3}{4}$, es farà igual però comptant cap a l'esquerra. Ens n'anem al –2, la unitat que va del –2 al –3 es divideix en 4 parts i prenem 3 (però comptant del –2 al –3 clar!).



Activitats proposades

32. Representa a la recta numèrica els nombres següents: $\frac{7}{6}; \frac{-17}{4}; 2,375; -3,\overset{\frown}{6}$

33. Representa a la recta numèrica 6,5; 6,2; 3,76; 8,43; 8,48; 8,51 i 8,38.

34. Ordena els següents nombres de major a menor: +1,47; –4,32; –4,8; +1,5; +1,409; 1,4, –4,308.

3.2. Representació a la recta real dels nombres reals:

Triat l'origen de coordenades i la grandària de la unitat (o dit d'una altra manera, si col·loquem el 0 i l'1) tot nombre real ocupa una posició a la recta numèrica i al revés, tot punt de la recta es pot fer correspondre amb un nombre real.

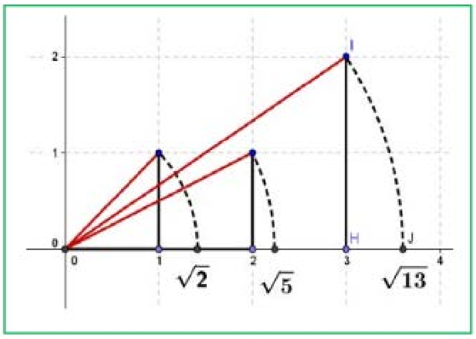
Aquesta segona part, és la propietat més important dels nombres reals i la que els distingeix dels nombres racionals.

Vegem com representar de forma exacta **alguns** nombres reals:

Representació a la recta de les arrels quadrades:

Per a representar arrels quadrades usem el *Teorema de Pitàgores*. Si en un triangle rectangle la hipotenusa és *h* i els catets són *a*, *b* tenim que $h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Activitats resoltes



- Representa a la recta $\sqrt{2}$

Si *a* = *b* = 1 tenim que $h = \sqrt{2}$. Només hem de construir un triangle rectangle de catets 1 i 1, la seua hipotenusa medeix $\sqrt{2}$, (la diagonal del quadrat de costat 1 mesura $\sqrt{2}$). Ara utilitzant el compàs, portem aqueixa distància a l'eix X (veure figura).

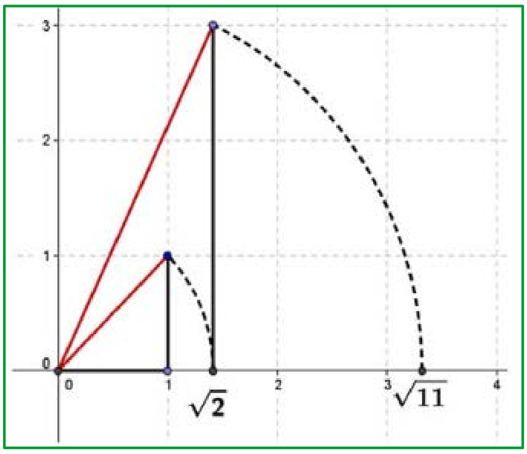
- Representa a la recta $\sqrt{5}$

Com $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$ només cal construir un triangle rectangle de catets 2 i 1, i la seua hipotenusa mesura $\sqrt{5}$.

Has agarrat el truc?, el radicand cal expressar-lo com a suma de 2 quadrats. El triangle rectangle tindrà com a catets aqueixos dos nombres.

- Així, per a representar $\sqrt{13}$, expressem 13 com a suma de 2 quadrats: $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2 \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$ ja que en un triangle rectangle de costats 3 i 2 la hipotenusa serà $\sqrt{13}$.

- Però, i si el nombre no pot posar-se com a suma de 2 quadrats?, per exemple l'11 (sempre complicant les coses! ☹).



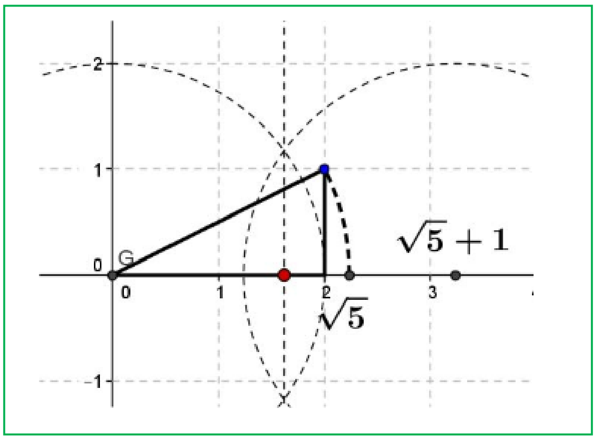
Caldrà fer-ho en 2 passos. 11 = 2 + 9, hi ha algun nombre el quadrat del qual siga 2?, per descomptat que sí, $\sqrt{2}$. Per tant $\sqrt{11}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+3^2}$, hem de fer un triangle rectangle de catets $\sqrt{2}$ i 3. Per a això primer es construeix $\sqrt{2}$ com abans i es traça una perpendicular de longitud 3 (veure figura).

Poden dibuixar-se ja així totes les arrels?, no. Hi ha algunes per a les que cal fer més passos ($\sqrt{7}$ per exemple requereix 3), però millor ho deixem ací, no?

Activitats resoltes

- Representa a la recta numèrica de forma exacta el nombre d'or $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Has sentit parlar del nombre d'or?

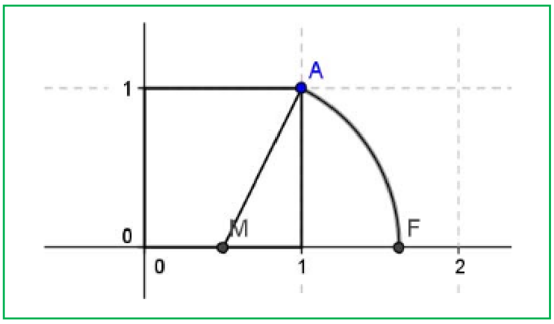


El Nombre d'Or (o Raó Àuria o Proporció Harmònica o Divina Proporció) és igual a $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

- Com el representem a la recta?

Només cal construir $\sqrt{5}$ com dalt, sumar 1 (traslladem 1 unitat amb el compàs) i dividir entre 2 trobant el punt mitjà (amb la mediatriu), fet.

- Una altra forma distinta:



Construïm un quadrat de costat 1 (un què?, un el que vulgues!). Trobem el punt mitjà del costat inferior (M) i portem la distància MA amb el compàs a l'eix horitzontal, OF és el número d'or.

Vegem:

$$MA=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$OF=\frac{1}{2}+MA=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Activitats proposades

35. Busca rectangle auri i espiral àuria en Internet.

36. Ja de pas busca la relació entre el *Nombre d'Or* i la *Successió de Fibonacci*.

37. Busca en youtube "algo pasa con phi" i em contes.

38. Representa a la recta numèrica de forma exacta: $\sqrt{20};\ -\sqrt{8};\ \sqrt{14};\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Densitat dels nombres reals

Els nombres reals són **densos**: entre cada dos nombres reals hi ha infinits nombres reals al mig.

Això és fàcil de deduir, si *a*, *b* són dos nombres amb *a* < *b* sabem que $a < \frac{a+b}{2} < b$, és a dir, la mitjana està entre els dos nombres. Com açò podem fer-ho les vegades que vulguem, d'ací el resultat.

Curiosament els racionals són també densos als nombres reals, així com els irracionals.

Activitats proposades

39. Calcula 3 nombres reals que estiguen entre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i 1.

40. Troba 5 nombres racionals que estiguen entre $\sqrt{2} i 1,5$

41. Troba 5 nombres irracionals que estiguen entre 3,14 i π

3.3. Ferramenta informàtica per a estudiar la proporció àuria

En aquesta activitat es va a utilitzar el programa *Geogebra* per a realitzar un estudi de la proporció àuria.

Un segment està dividit en dues parts que estan en proporció àuria si la raó entre la longitud del segment i la longitud de la part major coincideix amb la raó entre la longitud de la part major i la de la part menor.

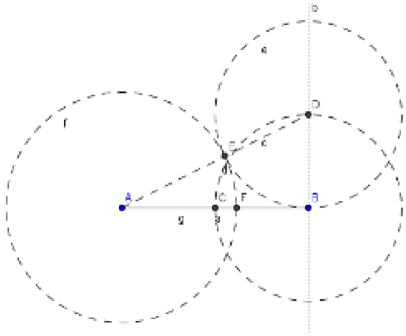
Activitats resoltes

- *Utilitza Geogebra per a dividir un segment en dues parts que estiguen en proporció àuria.*

Obri una nova finestra de *Geogebra,* en el menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadricula**

- Determina amb **Nou punt** els punts *A* i *B* i dibuixa el segment, *a*, que els uneix.
- Traça un segment *BD* perpendicular al segment *AB* en el punt *B*, la longitud del qual siga la mitat d'*AB,* pots seguir les instruccions següents:
  - ➢ Calcula el Punt **mitjà o centre** del segment *AB* i anomena'l *C*.
  - ➢ Dibuixa amb **Circumferència amb centre i punt que creua** la que té centre en *B* i passa per *C*.

- Traça la **Recta Perpendicular** al segment *AB* que passe per *B*.
- Defineix *D* com el **Punt d'Intersecció** entre aquesta recta i la circumferència.



- Dibuixa el segment *AD* i una circumferència amb centre *D* que passe per *B*. Siga *E* el **Punt d'Intersecció** d'aquesta circumferència amb el segment *AD*.
- Amb centre en *A* traça la circumferència que passa per *E* i determina el **punt d'Intersecció,** *F*, d'aquesta circumferència amb el segment *AB*.
- Traça el segment, *g*, que uneix els punts *A* i *F*.
- Comprova que el punt *F* divideix al segment *AB* en dues parts que estan en proporció àuria:
  - Tria en el menú **Opcions**, 5 **Posicions decimals**.
  - Calcula en la línia **d'Entrada** els quocients *a/g i g/(ag).*

Observa en la **Finestra algebraica** que aquests valors coincideixen, has calculat un valor aproximat del nombre d'or, Φ.

- Amb la ferramenta **Desplaça**, canvia la posició dels punts inicials *A* o *B* i comprova que el quocient entre les longituds dels segments *AF* i *FB* roman constant.
- Per a visualitzar millor la construcció pots dibuixar els elements auxiliars amb traç discontinu, triant al menú contextual, **Propietats i Estil de traç**.

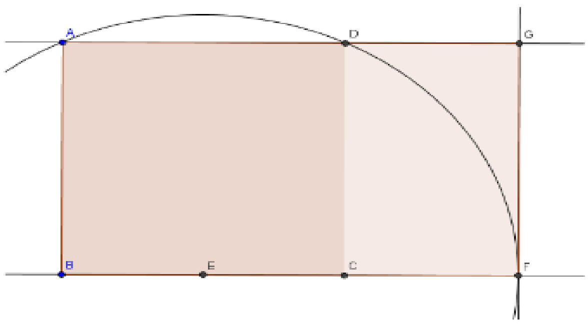
Un rectangle és auri si els seus costats estan en proporció àuria.

Si a un rectangle auri li llevem (o li afegim) un quadrat obtenim un rectangle semblant al de partida i per tant també auri.

- *Utilitza Geogebra per a dibuixar un rectangle auri.*

Obri una nova finestra de *Geogebra,* en el menú **Visualitza** desactiva **Eixos** i **Quadricula**

- Defineix dos punts *A* i *B* que seran els extrems del costat menor del rectangle i amb la ferramenta ***polígon regular*** dibuixa, a partir dels punts *A* i *B*, el quadrat *ABCD* i oculta els noms dels costats amb la ferramenta **Exposa/Oculta rètol**.



- Calcula el **Punt mitjà**, *E*, del costat *BC*. Amb centre en *E* dibuixa la **Circumferència** amb centre en *E* que passa per *A*.
- Traça la recta, *a*, que passa per *BC* i defineix com a *F* el **Punt d'intersecció** entre aquesta recta i la circumferència.
- Dibuixa la **Recta perpendicular** a la recta *a* què passa per *F*, i la **recta** que passa pels punts *A i D*, anomena *G* al **Punt d'intersecció** d'aquestes rectes i defineix amb **Polígon** el rectangle *ABFG*.
- A la finestra algebraica apareixen les longituds dels costats del rectangle com a *f* i *g*, introdueix a la línia d'Entrada *g / f* i observa en aquesta finestra que apareix el valor *e* que és una aproximació al

nombre auri. Tria al menú **Opcions**, 5 **Posicions decimals.**

- Dibuixa el **segment** *CF*, a la finestra algebraica apareix la seua longitud, *h*, introdueix a la **línia d'Entrada** *f / h*, observa que aquest quocient coincideix amb *g / f* i és una aproximació del nombre auri.

- Amb la ferramenta **Desplaça**, canvia la posició dels punts inicials *A* o *B* i observa que el quocient entre les longituds dels costats dels rectangles és constant.

El rectangle *ABFG* és auri ja que el quocient entre la longitud del seu costat major i la del menor és el nombre d'or, a més el rectangle *DCFG*, que s'obté en llevar un quadrat de costat el menor del rectangle, és també auri i per tant semblant al primer.

- *Crea les teues pròpies ferramentes amb Geogebra. Crea una que dibuixe rectangles auris.*

Es va a crear una ferramenta que a partir de dos punts *A* i *B* dibuixe el rectangle auri en què el segment *AB* és el costat menor.

- A la figura anterior oculta el nom dels punts *C, D, E, F* i *G* amb la ferramenta **Exposa/Oculta** rètol fent clic amb el ratolí sobre ells, a l'àrea de treball o a la finestra algebraica.

- Activa en el menú **Ferramentes** , l'opció **Creació de nova ferramenta** i defineix:

Objectes d'eixida: el polígon quadrat, el polígon rectangle i els punts *C, D, F*, i *G*.

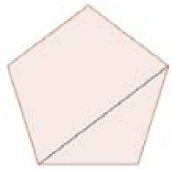
Objectes d'entrada: els dos punts inicials *A* i *B*.

I tria com a **nom de la ferramenta** *rectangleauri*. Observa que apareix a la barra de ferramentes.

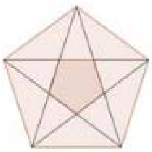
En l'opció **Maneig d'útils** del menú **Ferramentes** grava la ferramenta creada com *rectangleauri* , que es guarda com *rectangleauri.ggt*

Utilitza la ferramenta **Desplaçament de la zona gràfica** per a anar a una part buida de la pantalla i comprovar que la ferramenta *rectangleauri* funciona perfectament.

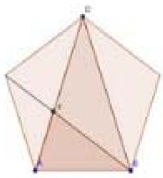
Activitats proposades



1. Comprova que la longitud del costat del pentàgon regular i la de la seua diagonal estan en proporció àuria.



2. Calcula amb Geogebra una aproximació de la raó de semblança entre un pentàgon regular i el que es forma al seu interior en dibuixar les seues diagonals. Determina sense utilitzar Geogebra el valor real de la raó de semblança entre aquests dos pentàgons.



3. Comprova que els triangles *ABD* i *ABF* de la figura són semblants i calcula aproximadament amb *Geogebra* la seua raó de semblança.

4. Calcula amb *Geogebra* el valor aproximat de la raó de semblança entre un decàgon regular i el decàgon que es forma en traçar les diagonals de la figura. Determina sense utilitzar Geogebra el valor real de la raó de semblança entre aquests dos polígons

4. INTERVALS, SEMIRECTES I ENTORNS:

Com ja sabem entre dos nombres reals hi ha infinits nombres. Hi ha una notació especial per a referir-se a aqueixos infinits nombres que hauràs de dominar per a aquest i futurs cursos.

4.1. Intervals. Tipus i significat

(Del lat. *Intervallum*): **2.** m. Conjunto dels valors que pren una magnitud entre dos límits donats. RAE.

Definició:

Un subconjunt de $\mathfrak{R}$ és un interval si per a qualsevol parell d'elements, a i b, d'aqueix subconjunt es verifica que si $a < x < b$ llavors x ha de pertànyer al dit subconjunt.

Estudiarem en aquest apartat intervals tancats de distints tipus: els intervals oberts, els intervals tancats i els intervals semioberts (o semitancats)

Intervals oberts:

Si ens volem referir al conjunt dels nombres que hi ha entre dos valors però sense comptar els extrems, usem un **interval obert**

Exemple:

- Els nombres superiors a 2 però menors que 7 es representen per (2, 7) i es llig "interval obert d'extrems 2 i 7". A ell pertanyen infinits nombres com 2,001; 3,5; 5; 6,999; … però no són d'aquest conjunt ni el 2 ni el 7. Això representen els parèntesis, que entren tots els nombres del mig però no els extrems.

Exemple:

- Els nombres positius menors que 10, es representen per (0, 10), l'interval obert d'extrems 0 i 10. Fixa't que 0 no és positiu, per la qual cosa no entra i el 10 no és menor que 10, per la qual cosa tampoc entra.

Nota: No s'admet posar (7, 2), el menor sempre a l'esquerra!

També cal dominar l'expressió d'aquests conjunts usant desigualtats, prepara't:

$$(2, 7) = \{x \in \mathfrak{R} / 2 < x < 7\}.$$

Traduïm: Les claus s'utilitzen per a donar els elements d'un conjunt, dins d'elles s'enumeren els elements o es dóna la propietat que compleixen tots ells. S'utilitza la x per a denotar a un nombre real, la / significa "tal que" (de vegades s'utilitza un punt i coma ";" o una ratlla vertical "|") i finalment es diu la propietat que compleixen mitjançant una doble desigualtat. Així que no t'espantes, això de dalt es llig: els nombres reals tal que són majors que 2 i menors que 7.

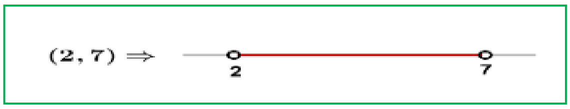
Usarem indistintament diverses d'aquestes nomenclatures perquè totes et resulten familiars.

És necessari dominar aquest llenguatge matemàtic ja que la frase en castellà pot no entendre's en altres països però t'assegurem que això de les claus i la | ho entenen tots els estudiants de matemàtiques del món (bé, quasi tots).

L'altre exemple: $(0, 10) = \{x \in \mathfrak{R} / 0 < x < 10\}$.

Finalment la **representació gràfica**:

Es posen **punts sense** omplir als extrems i es ressalta la zona intermèdia.



De vegades també es poden posar al 2 i al 7 parèntesi: "( )", o claudàtors al revés: "] [".

Pregunta: Quin és el nombre que està més prop de 7, sense ser 7?

Pensa que 6,999...=7 i que entre 6,999 i 7 hi ha "molts, moltíssims ..." nombres.

Nota:

A alguns textos els intervals oberts es representen així:]2 , 7[la qual cosa tenen alguns avantatges com que els estudiants no confonguen l'interval (3, 4) amb el punt del pla (3, 4), que assegurem que ha ocorregut (però tu no seràs un d'ells no?), o l'enutjosa necessitat de posar (2,3 ; 3,4) perquè (2,3,3,4) no ho entendria ni Gauss.

Intervals tancats:

Igual que els oberts però ara **sí** que pertanyen els extrems.

Exemple:

- L'interval dels nombres majors o iguals que –2 però menors o iguals que 5. Ara el –2 i el 5 sí que entren. Es fa igual però posant claudàtors: [–2, 5].

En forma de conjunt s'escriu:

$$[-2, 5] = \{x \in \mathfrak{R}; -2 \le x \le 5\}.$$

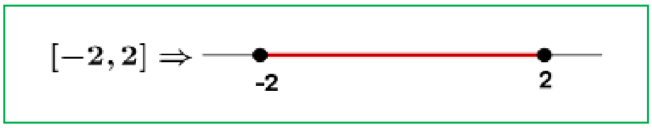
Fixa't que ara posem $\le$ que significa "*menor o igual*".

Exemple:

- L'interval dels nombres el quadrat del qual no és superior a 4. Si ho penses un poc veuràs que són els nombres entre el –2 i el 2, ambdós inclosos (no superior $\Leftrightarrow$ menor o igual). Per tant:

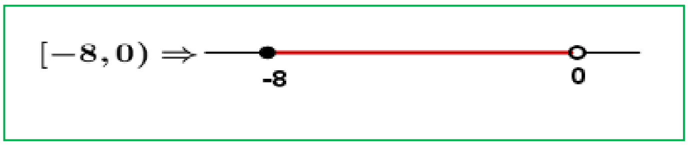
$$[-2, 2] = \{x \in \mathfrak{R}; -2 \le x \le 2\}.$$

La representació gràfica és igual però posant **punts emplenats**. De vegades també es pot representar gràficament amb claudàtors: "[ ]".



Intervals semioberts (o semitancats, a triar)

Per descomptat que un interval pot tindre un extrem obert i un altre tancat. La notació serà la mateixa.



Exemple:

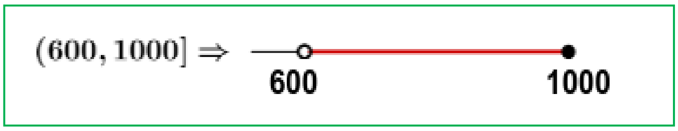
- Temperatura negativa però no per davall de –8 ºC:

$$[-8, 0) = \{x \in \mathfrak{R}; -8 \le x < 0\}.$$

És l'interval tancat a l'esquerra d'extrems –8 i 0.

- Nombres superiors a 600 però que no excedisquen de 1000.

  (600, 1000] = {x ∈ $\mathfrak{R}$; 600 < x ≤ 1000}.



És l'interval tancat a la dreta d'extrems 600 i 1000.

4.2. Semirectes

Moltes vegades el conjunt d'interès no està limitat per un dels seus extrems.

Exemple:

- Els nombres reals positius: No hi ha cap nombre positiu que siga el major. Es recorre llavors al símbol ∞ i s'escriu:

$$(0, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R} \mid x > 0\}.$$

Note's que és equivalent posar $x > 0$ que posar $0 < x$, es pot posar d'ambdues formes.

Exemple:

- Nombres no majors que 5:

$$(-\infty, 5] = \{x \in \mathfrak{R} \mid x \leq 5\}.$$

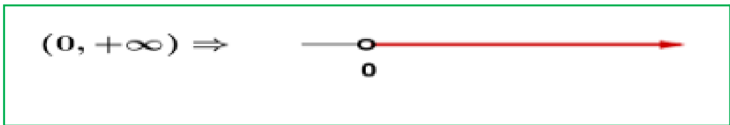
Ací el 5 sí que entra i per això el posem tancat ("no major" equival a "menor o igual")

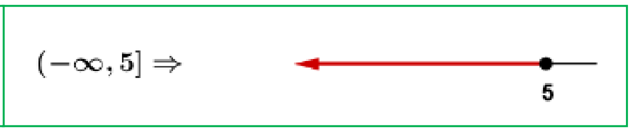
Exemple:

- Solució de $x > 7$:

$$(7, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R} \mid x > 7\}.$$

Nota: **L'extrem no tancat sempre es posa obert**. No volem veure açò: (7, +∞]





Les semirectes també són intervals. Són intervals no tancats.

Inclús la recta real és un interval:

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathfrak{R} \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathfrak{R}.$$

És l'únic interval no tancat ni superiorment ni inferiorment.

Observa que amb aquesta nomenclatura estem dient que –∞ i que +∞ no són nombres reals.

4.3. Entorns

És una forma especial de representar els intervals oberts.

Es defineix l'entorn de centre a i radi r i es denota E(a, r) (una altra forma usual és $E_r(a)$) com el conjunt de nombres que estan a una **distància de *a* menor que *r***.

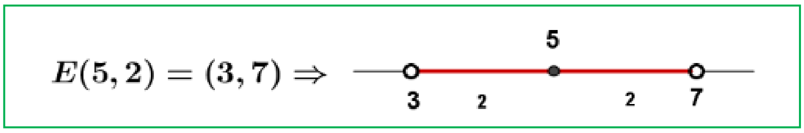
E(*a*, *r*) = (*a* – *r*, *a* + *r*)

Observa que un entorn és sempre un interval obert i tancat.

Amb un exemple ho entens millor:

Exemple:

- L'entorn de centre 5 i radi 2 són els nombres que estan de 5 a una distància menor que 2. Si ho pensem un poc, seran els nombres entre 5 – 2 i 5 + 2, és a dir, l'interval (3, 7). És com agafar el compàs i amb centre en 5 marcar amb obertura 2.



Fixa't que el 5 està al centre i la distància del 5 al 7 i al 3 és 2.

Exemple:

- E(2 , 4) = (2 – 4 , 2 + 4) = (–2, 6)

És molt fàcil passar d'un entorn d'un interval. Anem a fer-ho al revés.

Exemple:

- Si tinc l'interval obert (3, 10), com es posa en forma d'entorn?

Trobem el punt mitjà $\frac{3+10}{2}=\frac{13}{2}$ = 6,5 que serà el centre de l'entorn. Ens falta trobar el radi:

(10 – 3) : 2 = 3,5 és el radi (la mitat de l'ample).

Per tant (3, 10) = E(6,5 ; 3,5)

En general:

L' interval (*b*, c) és l'entorn $E\left(\frac{b+c}{2},\frac{c-b}{2}\right)$.

Exemple:

- L' interval (–8, 1) = $E(\frac{-8+1}{2},\frac{1-(-8)}{2}) = E(-3,5;4,5)$.

Activitats proposades

42. Expressa com a interval o semirecta, en forma de conjunt (usant desigualtats) i representa gràficament:

a) Percentatge superior al 15 %. b) Edat inferior o igual a 21 anys.

c) Nombres el cub dels quals siga superior a 27. d) Nombres positius la part entera dels quals té 2 xifres.

e) Temperatura inferior a 24 ºC. f) Nombres que estiguen de 2 a una distància inferior a 3.

g) Nombres per als que existeix la seua arrel quadrada (és un nombre real).

43. Expressa en forma d'interval els entorns següents:

a) E(2, 7) b) E(–3, $\frac{8}{3}$) c) E(–1; 0,001)

44. Expressa en forma d'entorn els intervals següents:

a) (1, 7) b) (–5 , –1) c) (–4 , 2)

45. Els sous superiors a 500 € però inferiors a 1000 € es poden posar com a interval de nombres reals? **Pista:* 600,222333€ pot ser un sou?

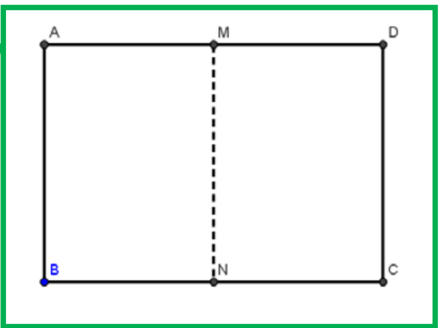
CURIOSITATS. REVISTA

Folis i

Ja sabem que un quadrat de costat L té una diagonal que val L , vegem alguna cosa més:

L'imatge representa un foli amb la norma DIN 476 que és la més utilitzada a nivell mundial.

Aquesta norma especifica que un foli DIN A0 té una superfície d'1 m^2 i que en partir-lo per la mitat obtindrem un DIN A1 que ha de ser un rectangle semblant a l'anterior. Partint l'A1 en 2 iguals obtenim el DIN A2 , després el DIN A3 i el DIN A4 que és el més usat. Tots són semblants als anteriors.



Què significa ser semblant?

Doncs que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AM}$, però AM = AD/2 aleshores

$$AB^2 = \frac{1}{2}AD^2 \Rightarrow AB = \frac{AD}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD = \sqrt{2}AB$$

Per tant als folis DIN 476:

la raó entre el llarg i l'ample és $\sqrt{2}$.

No queda ací la cosa, físa't que al partir el foli en 2 parts iguals el nou foli té el costat més gran que coincideix amb el costat menor de l'original: AB és ara el costat major i abans era el menor, com AB = AD/ $\sqrt{2}$ resulta que la raó de semblança és $\sqrt{2}$. És a dir, per a pasar d'un foli A0 a un altre A1 dividim els seus costats entre . El mateix per als següents.

Calculem les dimensions:

Per a l'A0 tenim que l'àrea és AD · AB = $1m^2$

$$\Rightarrow \frac{AD \cdot AD}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow AD^2 = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2} \approx \text{1.189 m;}$$

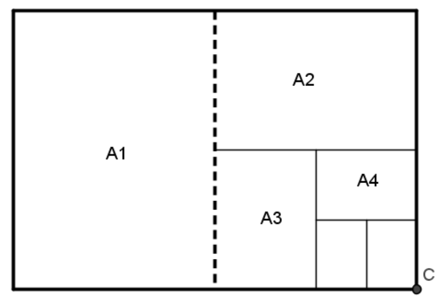
AB = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} \approx$ 0.841 m. Per a obtindre les mesures de l'A4 dividim 4 vegades entre $\sqrt{2}$:

Llarg = $\frac{\sqrt[4]{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^4} \approx$ 0.297 m = 29.7 cm

Ample= Llargo/ $\sqrt{2} \approx$ 0.210 m = 21.0 cm

Una taula

	Llarg (cm)	Ample (cm)	Àrea (cm^2)
A0	118,92	84,09	10000
A1	84,09	59,46	5000
A2	59,46	44,04	2500
A3	42,04	29,83	1250
A4	29,73	21,02	625
A5	21,02	14,87	415,2



Qüestions:

Comprova els valors de la taula anterior (hi ha al menys tres valors enganyats)

Quants folis A4 caben en un foli A0?

Quines són les dimensions de l'A6?, i de l'A7?

El nombre d'or

Dividim un segment en dues parts de manera que si dividim la longitud del segment total entre la part major deu de donar el mateix que en dividir la part major entre la part menor.

Tenim que (a+b)/a = a/b

El nombre d'Or (o Raó Aúrea) anomenat ϕ (fi) és precisament el valor d'aqueixa proporció, així:

$$\Phi = \frac{a}{b};\ \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi \Rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618034$$

Ja te... curiositats:

1

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$$

2

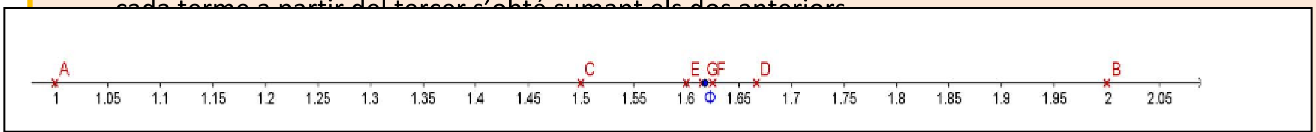
$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1$$

$$\Phi^4 = 3\Phi + 2$$

$$\ldots \Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$$

On F_n és el *n*-èsim Nombre de Fibonacci. Aquests nombres són 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 … on cada terme a partir del tercer s'obté sumant els dos anteriors.



=1,5; 5/3 =1,666…; 8/5 =1,6; 13/8 = 1,625

Com pot veure's, ens acostem ràpidament al valor del nombre d'Or, primer per davall, després per dalt, per davall, … alternativament.

$$F_n = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Si per exemple substituïm *n* per 20 obtenim $F_{20} = 6765$.
Realment podem prescindir del 2n terme del numerador, per a *n* > 3 es fa molt més xicotet que el primer. Per exemple, per a *n* = 6 si fem $\frac{\Phi^6}{\sqrt{5}}$ obtenim 8,0249 que arredonit es 8, el valor correcte.

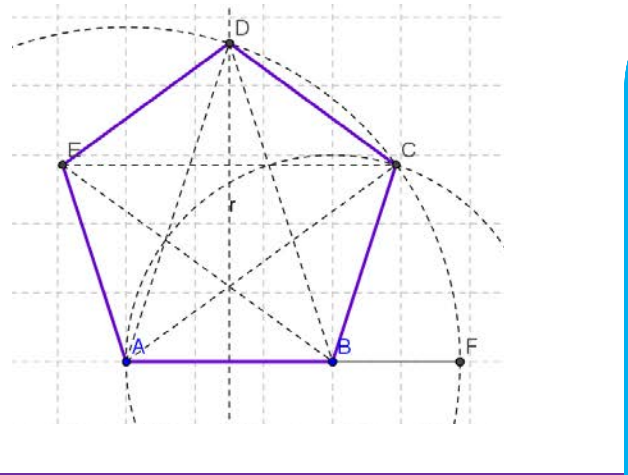
...ue per als autors

Activitats:

a) Calcula F_{31} i F_{30} amb la fórmula de Binet.

b) Fes el quocient i mira si és una bona aproximació del Nombre d'Or.

El pentàgon regular i el Nombre d'Or.



En un pentàgon regular la raó entre una diagonal i el costat és Φ . Com sabem construir Φ , la construcció d'un pentàgon regular és molt senzilla:

Si AB serà un costat del nostre pentàgon, construïm el punt F alineat amb A i B que complisca AF/AB igual a Fi (s'indica com fer-ho al text).

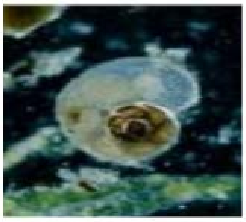
Llavors, AB serà el costat i AF la mesura de la diagonal.

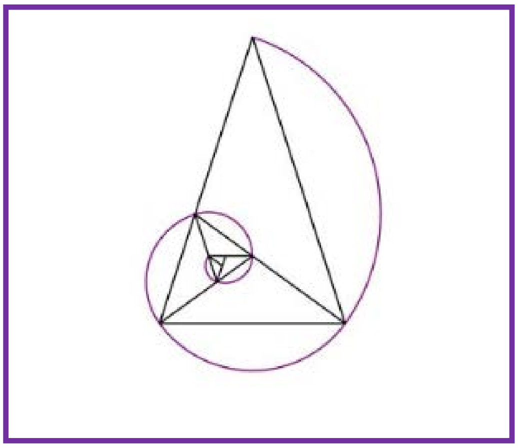
Tracem la mediatriu d'AB i una circumferència de centre A i radi AF. Es tallen en D que és un vèrtex del pentàgon.

Tracem ara una circumferència amb centre B i radi AB, es talla amb l'anterior en C que és un altre vèrtex del pentàgon. Només queda trobar E que és molt fàcil.

El pentàgon regular amb les seues diagonals es coneix com "Pentagrama Místic" i pareix que tornava bogets als pitagòrics, en ell el nombre d'Or apareix de forma desmesurada.

Del Pentagrama hem tret aquest triangle, anomenat Triangle Auri que permet obtindre més triangles auris fent la bisectriu en un dels angles iguals i formar aquesta espiral. Aquesta espiral és pareguda a l'Espiral Àuria, a la de *Fibonacci* i a l'espiral logarítmica que és la que apareix a: galàxies, huracans, petxines, gira-sols …





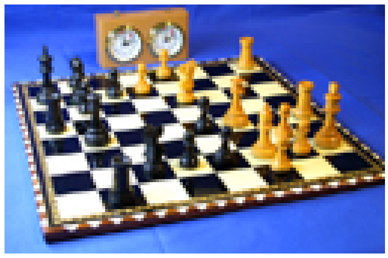
Autor: Paco Moya i Nieves Zuasti
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Els escacs

Conta la llegenda que quan l'inventor dels escacs li va mostrar aquest joc al rei Shirham de l'Índia, aquest es va entusiasmar tant que li va oferir regalar-li tot el que volguera. L'inventorva demanar un gra de blat per a la primera casella del joc, dos per a la segona, 4 per a la tercera, i així duplicant la quantitat en cada casella.

Al rei li va paréixer una petició modesta, però... com es pot comprovar aqueix nombre de grans donen poc més de 15 bilions de tones mètriques el que correspon a la producció mundial de blat de 21.685 anys.

Impossible que el rei tinguera tant blat!



T'agrada fer màgia!

Pots fer aquest joc amb els teus amics. Per a fer-lo necessites paper i llapis, o millor, una calculadora, o encara millor, un full de càlcul.

Escriu en una columna els nombres de l'1 al 20. Al costat de l'1 escriu el nombre que et diga el teu amic o amiga, d'una, dues o tres xifres (376). Al costat del 2 escriu també un altre nombre inventat d'1, 2 o 3 xifres (712). Al costat del 3, la suma dels dos números anteriors (1088). Al costat del 4, el mateix, la suma dels dos nombees anteriors (ara els del costat del 2 i del 4), i així fins a arribar a la casella 20.

Ara divideix el nombre del costat del 20 (3948456) entre el nombre del costat del 19 (2440280), i màgia!, pots endevinar el resultat. S'aproxima al nombre d'or!

1,618...

Per què? Saps alguna cosa de la successió de Fibonacci? Troba alguna cosa a Internet.

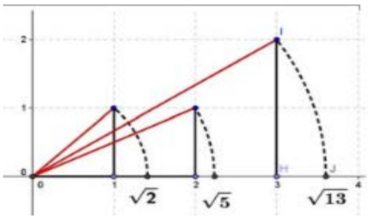
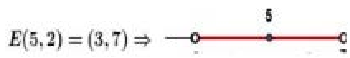
Fes un full de càlcul com la del marge.

E6

	A	B	C	D	E
1	**T'agrada fer màgia!**				
2					
3	1	376			
4	2	712			
5	3	1088			
6	4	1800			
7	5	2888			
8	6	4688			
9	7	7576			
10	8	12264			
11	9	19840			
12	10	32104			
13	11	51944			
14	12	84048			
15	13	135992			
16	14	220040			
17	15	356032			
18	16	576072			
19	17	932104			
20	18	1508176			
21	19	2440280			
22	20	3948456			
23					
24	3948456	dividido por	2440280	es igual a	1,61803
25					

Nombres reals. 4t A d'ESO

RESUM

		Exemples
Conjunts de nombres	**Naturals** ➔ N = {1, 2, 3, …}; **Enters** ➔ Z = {…, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, …} **Racionals** ➔ Q = $\{\frac{a}{b}; a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$; **Irracionals** ➔ I = ℜ − Q; **ℜ=** Q∪I	
Fraccions i expressió decimal	Totes les fraccions tenen expressió decimal exacta o periòdica. Tota expressió decimal exacta o periòdica es pot posar com a fracció.	$0{,}175 = \frac{175}{1000} = \frac{7}{40}$ *x* = 1,7252525… = 854/495
Nombres racionals	La seua expressió decimal és exacta o periòdica.	2/3; 1,5; 0,333333333….
Representació a la recta real	Fixat un origen i una unitat, hi ha una bijecció entre els nombres reals i els punts de la recta. A cada punt de la recta li correspon un nombre real i viceversa.	
N. Reals	Tota expressió decimal finita o infinita és un nombre real i recíprocament.	0,333333; π; $\sqrt{2}$
Interval obert	Interval obert en el que els extrems **no** pertanyen a l'interval	 (2, 7) = {x ∈ℜ/ 2 < x < 7}.
Interval tancat	Els extrems **SI** pertanyen a l'interval	[−2, 2] = {x ∈ℜ; −2 ≤ x ≤ 2} 
Intervals  **Semioberts (o semitancats)**	Interval amb un extrem obert i un altre tancat	$[-8, 0) = \{x \in \Re \; / -8 \le x < 0\}$
Entorns	Forma especial d'expressar un interval obert: **E(*a* , *r*) = (*a* − *r* , *a* + *r*)**	

EXERCICIS I PROBLEMES

Nombres

1. Efectua les següents operacions amb fraccions:

a) $-\frac{4}{7}-\frac{5}{2}$ b) $\frac{3}{5}+\frac{(-7)}{9}$ c) $\frac{(-2)}{3}+\frac{(-1)}{8}$ d) $\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}$ f) $\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{9}{2}\right)$ g) $\frac{25}{3}:\frac{5}{9}$ h) $\frac{7}{3}:\frac{14}{9}$ i) $15:\frac{3}{5}$

2. Simplifica les següents fraccions algebraiques:

a) $\left(\frac{a-1}{3}+\frac{a+1}{2}\right)\cdot\frac{6}{a}$ b) $\frac{x-2}{x^2-4}$ c) $\frac{x^2+6x+9}{x-3}:\frac{x^2-9}{x+3}$ d) $\frac{a^2-4}{a^2}\cdot\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a-2}\right)$

3. Realitza les operacions:

a) (24,67 + 6,91)3,2 b) 2(3,91 + 98,1) c) 3,2(4,009 + 5,9)4,8

4. Troba el valor exacte de $\frac{0,\overset{\frown}{4}}{0,4}$ sense calculadora.

5. Digues quines d'aquestes fraccions tenen expressió decimal exacta i quines periòdica:

$$\frac{9}{40};\frac{30}{21};\frac{37}{250};\frac{21}{15}$$

6. Troba 3 fraccions *a, b, c* tal que $\frac{3}{4}<a<b<c<\frac{19}{25}$

7. Quants decimals té $\frac{1}{2^7\cdot 5^4}$?, t'atreveixes a explicar el motiu?

8. Fes la divisió 999 999:7 i després fes 1:7. Serà casualitat?

9. Ara divideix 999 entre 37 i després fes 1:37, és casualitat?

10. Fes al teu quadern una taula i digues a quins conjunts pertanyen els nombres següents:

2,73535...; $\pi-2$; $\sqrt[5]{-32}$; 10^{100} ; $\frac{102}{34}$; –2,5 ; 0,1223334444...

11. Contesta verdader o fals, justificant la resposta.

a) $\mathrm{Q}\cap(\Re - \mathrm{Q}) = \{0\}$

b) $\mathrm{Z}\subset\mathrm{Q}$

c) L'arrel quadrada d'un nombre natural és irracional.

d) $\sqrt{7}\notin\mathrm{Q}$

e) 1/47 té expressió decimal periòdica.

12. Posa exemples que justifiquen:

a) La suma i la resta de nombres irracionals pot ser racional.

b) El producte o divisió de nombres irracionals pot ser racional.

13. Què serà la suma de nombre racional amb un altre irracional? (Pensa en la seua expressió decimal)

14. La suma de 2 nombres amb expressió decimal periòdica pot ser un enter?

15. Troba l'àrea i el perímetre d'un rectangle de costats $\sqrt{2} i \sqrt{8}$m.

16. Troba l'àrea i el perímetre d'un quadrat la diagonal del qual mesura 2 m.

17. Troba l'àrea i el perímetre d'un hexàgon regular de costat $\sqrt{3}$ m.

18. Troba l'àrea i el perímetre d'un cercle de radi $\sqrt{10}$ m.

19. Troba l'àrea total i el volum d'un cub de costat $\sqrt[3]{7}$ m.

20. Per quin nombre hem de multiplicar els costats d'un rectangle perquè la seua àrea es faça el triple?

21. Quant ha de valdre el radi d'un cercle perquè la seua àrea siga 1 m^2?

22. Tenim una circumferència i un hexàgon regular inscrit en ella. Quina és la raó entre els seus perímetres? (Raó és divisió o quocient)

Potències

23. Calcula:

a) $(+2)^7$ b) $(-1)^{9345}$ c) $(-5)^2$ d) $(-5)^3$ e) $(1/3)^3$ f) $(\sqrt{2})^8$

24. Expressa com a única potència:

a) $(-5/3)^4 \cdot (-5/3)^3 \cdot (-5/3)^{-8}$ b) $(1/9)^{-5} : (1/9)^4 \cdot (1/9)^{-2}$

c) $(2/3)^8 \cdot (-3/2)^8 : (-3/5)^8$ d) $(-3/5)^{-4} \cdot (-8/3)^{-4} : (-5/4)^{-4}$

25. Calcula:

a) $(-2/3)^{-4}$ b) $(-1/5)^{-2}$ c) $\dfrac{(11^4 \cdot (-2)^4 \cdot 5^4)^3}{(25^2 \cdot 4^2 \cdot 11^2)^3}$ d) $\dfrac{3^2 \cdot \dfrac{25^5}{9^5}}{(-5)^2 \cdot 4^5}$ e) $\dfrac{\left(\dfrac{-2}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{-25}{6}\right)^3}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{5}{8}\right)^6}$

26. Extrau els factors possibles en cada radical:

a) $\sqrt[4]{a^7 \cdot b^6}$ b) $\sqrt[3]{15^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6}$ c) $\sqrt{25 \cdot 7^3 \cdot 16^3}$

27. Expressa en forma d'única arrel:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{50}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}$

28. Expressa en forma de potència: a) $\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt{5^5}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt{3^3}}$

29. Simplifica l'expressió:

a) $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{x}}\right)^3$ b) $\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[5]{x^{11}}}{\sqrt[3]{x}}$

30. S'estima que el volum de l'aigua dels oceans és de 1285600000 km^3 i el volum d'aigua dolça és de 35000000 km^3. Escriu aqueixes quantitats en notació científica i calcula la proporció d'aigua dolça.

31. Se sap que en un àtom d'hidrogen el nucli constitueix el 99 % de la massa, i que la massa d'un electró és aproximadament de 9,109 · 10^{-31} kg. Quina massa té el nucli d'un àtom d'hidrogen? (*Recorda*: Un àtom d'hidrogen està format pel nucli, amb un protó, i per un únic electró)

32. A Joan li han fet una anàlisi de sang i té 5 milions de glòbuls rojos en cada mm^3. Escriu en notació científica el nombre aproximat de glòbuls rojos que té Juan estimant que té 5 litres de sang.

Representació a la recta real

33. *Pitàgores* va viure entre el 569 i el 475 anys a. C. i Gauss entre el 1777 i el 1855, quina diferència d'anys hi ha entre ambdues dates?

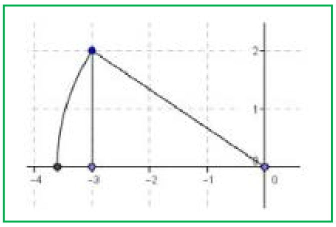
34. Representa de forma exacta a la recta numèrica: –2,45; 3,666…

35. Situa a la recta real els nombres 0,5; 0,48; 0,51 i 0,505.

36. Ordena els següents nombres de major a menor: 2,4; –3,62; –3,6; 2,5; 2,409; –3,9999…

37. Representa a la recta numèrica de forma exacta els nombres següents:

$$\frac{2}{3};\ \frac{-3}{5};\ \frac{5}{2};\ 1{,}256;\ 3{,}\hat{5}$$



38. La imatge és la representació d'un nombre irracional, quin?

39. Representa de forma exacta a la recta numèrica: $-\sqrt{8};\ 2\sqrt{5};\ \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

40. Troba 5 nombres racionals que estiguen entre 3,14 i π.

Intervals

41. Expressa amb paraules els següents intervals o semirectes:

a. (–5, 5] b. $\{x \in \Re \mid -2 < x \leq 7\}$.

c. $\{x \in \Re \mid x > 7\}$ d. $(-3, +\infty)$

42. Troba:

a. (2, 4] U (3, 5] b. $(2, 4] \cap (3, 5]$ c. $(-\infty, 1] \cap (-1, +\infty)$

43. Pot expressar-se com a entorn una semirecta? Raona la resposta.

44. Expressa com a entorns oberts, si és possible, els intervals següents:

a. $(0\ ,\ 8)$ b. $(-6\ ,\ -2)$ c. $(2, +\infty)$

45. Expressa com a intervals oberts els entorns següents:

a. $E_{2/3}(4)$ b. $E_{1/2}(-7)$ c. $E(1, 2)$ d. $E(0, 1)$

46. Quins nombres al quadrat donen 7?
47. Quins nombres reals al quadrat donen menys de 7?
48. Quins nombres reals al quadrat donen més de 7?

Diversos

49. Un nombre irracional tan important com a Pi és el nombre "e". $e \approx 2{,}718281828...$ que pareix periòdic, però no, no ho és. És un nombre irracional. Es defineix com el nombre a què s'acosta quan *n* es fa molt, però que molt gran. Agafa **la calculadora** i dóna-li a *n* valors cada vegada majors, per exemple: 10, 100, 1000, …

Apunta els resultats a una **taula**.

50. Una altra forma de definir *e* és $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$

Que diràs tu què són aqueixos nombres tan admirats!, s'anomena factorial i és molt senzill: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, es multiplica des del nombre fins a arribar a 1. Per exemple: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. No et preocupes, que la tecla "!" està a la calculadora. Pots calcular *e* amb 6 xifres decimals correctes? **Nota:* Fixa't que ara la convergència és molt més ràpida, només has hagut d'arribar fins a n = ?

51. Ordena de menor a major les masses següents:

Massa d'un electró	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ quilograms
Massa de la Terra	$5{,}983 \cdot 10^{24}$ quilograms
Massa del Sol	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ quilograms
Massa de la Lluna	$7{,}3 \cdot 10^{22}$ quilograms

52. Prenent $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ grams com a massa d'un protó i $1{,}2 \cdot 10^{-15}$ metres com a radi, i suposant-ho esfèric, calcula: a) el seu volum en cm^3 (Recorda el volum d'una esfera és $(4/3)\pi r^3$. b) Troba el pes d'un centímetre cúbic d'un material format exclusivament per protons. c) Compara el resultat amb el pes d'un centímetre cúbic d'aigua (un gram) i d'un centímetre cúbic de plom (11,34 grams).

AUTOAVALUACIÓ

1. Indica quina afirmació és falsa. El nombre –0,3333333… és un nombre

a) real b) racional c) irracional d) negatiu

2. Operand i simplificant la fracció $\frac{a^2-4a+4}{a-2} : \frac{a-2}{a+3}$ s'obté:

a) a + 3 b) 1/(a + 3) c) a – 2 d) 1/(a – 2)

3. L'expressió decimal 0,63636363…. S'escriu en forma de fracció com

a) 63/701 b) 7/11 c) 5/7 d) 70/111

4. Al simplificar $\sqrt{2}(7\sqrt{2}-5\sqrt{2}+4\sqrt{2})$ obtens:

a) $6\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}(5\sqrt{2})$ c) 12 d) 8

5. Contesta sense fer operacions. Les fraccions 4/7; 9/150, 7/50 tenen una expressió decimal:

a) periòdica, periòdica, exacta b) periòdica, exacta, periòdica c) periòdica, exacta, exacta

6. El conjunt dels nombres reals menors o iguals a –2 s'escriu:

a) (–∞, –2) b) (–∞, –2] c) (–2, +∞) d) (–∞, –2[

7. L'entorn de centre –2 i radi 0,7 és l'interval:

a) (–3,7, –2,7) b) (–2,7, –1,3) c) (–3,3, –2,7) d) (–2,7, –1,3]

8. L'interval (–3, –2) és l'entorn:

a) E(–2'5; 1/2) b) E(–3'5; –0,5) c) (–3'5, 1/2) d) (–2'5; –0,5)

9. En efectuar l'operació $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{6}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ s'obté:

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{2}}$ b) 25/4 c) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{6}}$ d) $\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{5}{2}}$

10. En efectuar l'operació 0,000078 + 2,4 · 10^{-5} s'obté:

a) 3,6 · 10^{-10} b) 1,8912 · 10^{-10} c) 10,2 · 10^{-5} d) 18,72 · 10^{-5}