Matemàtiques orientades als ensenyances aplicades:

4t A ESO. Capítol 5: Geometria al pla i a l'espai. Longituds, àrees i volums.

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez

Revisors: Javier Rodrigo i David Hierro

Il·lustracions: Milagros Latasa i Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Índex

Resum

La Geometria és una de les branques més antigues de les Matemàtiques i el seu estudi ens ajuda a interpretar millor la realitat que percebem. El seu nom significa "*mesura de la Terra*". Mesurar és calcular longituds, àrees i volums. En aquest tema recordaràs les fórmules que vas estudiar ja l'any passat i aprofundiràs sobre les seues aplicacions a la vida real.

Ens movem a l'espai de dimensió tres, caminem sobre una esfera (que per ser gran, considerem plana), les cases són quasi sempre ortoedres. La informació que percebem per mitjà dels nostres sentits la interpretem en termes geomètrics. Precisem de les fórmules d'àrees i volums dels cossos geomètrics per a calcular les mesures dels mobles que caben al nostre saló, o per a fer un pressupost de la reforma de la nostra vivenda.

Moltes plantes distribueixen les seues fulles buscant el màxim d'il·luminació i les seues flors en forma esfèrica buscant un aprofitament òptim de l'espai. L'àtom de ferro disposa els seus electrons en forma de cub, els sistemes de cristal·lització dels minerals adopten formes polièdriques, les bresques de les abelles són prismes hexagonals. Aquests són alguns exemples de la presència de cossos geomètrics a la naturalesa.

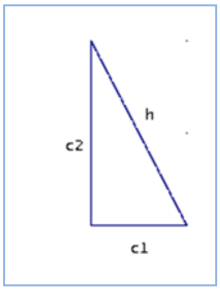
ORIGEN DE LA IMATGE: WIKIPEDIA

1. TEOREMA DE PITÀGORES I TEOREMA DE TALES

1.1. Teorema de Pitàgores

Teorema de Pitàgores al pla

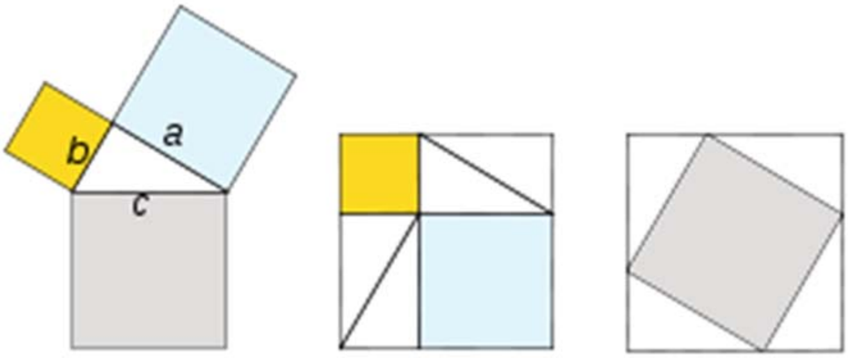
Ja saps que:



En un triangle rectangle anomenem **catets** als costats incidents amb l'angle recte i **hipotenusa** a l'altre costat.

En un triangle rectangle, la hipotenusa al quadrat és igual a la suma dels quadrats dels catets. $h^2 = c_1^2 + c_2^2$

Demostració:



Exemple:

- Si els catets d'un triangle rectangle mesuren 6 *cm* i 8 *cm*, la seua hipotenusa val 10 *cm*, ja que:

$$h = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm.}$$

Activitats resoltes

- *Si la hipotenusa d'un triangle rectangle mesura 13 dm i un dels seus catets mesura 12 dm, troba la mesura de l'altre catet:*

  Solució: Pel teorema de Pitàgores:

$$c = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13-12)\times(13+12)} = \sqrt{25} = 5 \ dm$$

Activitats proposades

1. És possible trobar un triangle rectangle els catets del qual mesuren 12 i 16 *cm* i la seua hipotenusa 30 *cm*? Si la teua resposta és negativa, troba la mesura de la hipotenusa d'un triangle rectangle els catets del qual mesuren 12 i 16 *cm*.

2. Calcula la longitud de la hipotenusa dels següents triangles rectangles de catets:

a) 4 *cm* i 3 *cm* b) 1 m i 7 *m* *c)* c) 2 *dm* i 5 dm d) 23,5 *km* i 47,2 *km*.

Utilitza la calculadora si et resulta necessària.

3. Calcula la longitud del catet que falta als següents triangles rectangles d'hipotenusa i catet:

a) 8 *cm* i 3 *cm* b) 15 m i 9 *m*

c) 35 *dm* i 10 *dm* d) 21,2 *km* i 11,9 *km*

4. Calcula l'àrea d'un triangle equilàter de costat 5 *m*.

5. Calcula l'àrea d'un hexàgon regular de costat 7 *cm*.

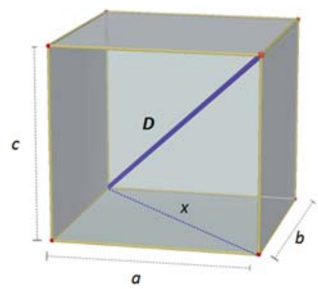
Teorema de Pitàgores a l'espai

Ja saps que:

La diagonal d'un ortoedre al quadrat coincideix amb la suma dels quadrats de les seues arestes.

Demostració:

Siguen *a, b* i *c* les arestes de l'ortoedre que suposem recolzat al rectangle de dimensions *a , b*.



Si *x* és la diagonal d'aquest rectangle, verifica que: $x^2 = a^2 + b^2$

El triangle de costats *D, x, a* és rectangle per tant: $D^2 = x^2 + c^2$

I tenint en compte la relació que verifica *x:*

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Activitats resoltes

- *Calcula la longitud de la diagonal d'un ortoedre d'arestes 7, 9 i 12 cm.*

  $D^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 7^2 + 9^2 + 12^2 = 274$. $D \approx 16{,}55$ cm.

- *Les arestes de la base d'una caixa amb forma d'ortoedre mesuren 7 cm i 9 cm i la seua altura 12 cm. Estudia si pots guardar en ella tres barres de longituds 11 cm, 16 cm i 18 cm.*

  El rectangle de la base té una diagonal *d* que medeix: $d = \sqrt{7^2 + 9^2} = \sqrt{130} \approx 11{,}4$ cm

  Per tant la barra més curta cap recolzada en la base.

  La diagonal de l'ortoedre vam veure en l'activitat anterior que mesura 16,55, per tant la segona barra si és possible, inclinada, però la tercera, no.

Activitats proposades

6. Una caixa té forma cúbica de 3 *cm* d'aresta. Quant mesura la seua diagonal?

7. Calcula la mesura de la diagonal d'una sala que té 8 metres de llarg, 5 metres d'ample i 3 metres d'altura.

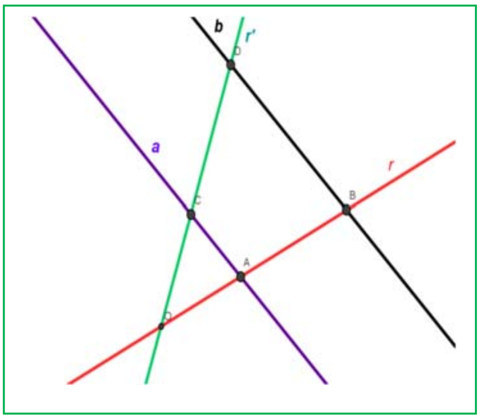
Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

1.2. Teorema de Tales

Ja saps que:

Donades dues rectes, *r* i *r'*, que es tallen al punt *O*, i dues rectes paral·leles entre si, *a* i *b*. La recta *a* talla a les rectes *r* i *r'* als punts *A* i *C*, i la recta *b* talla a les rectes *r* i *r'* als punts *B* i *D*. Llavors el Teorema de Tales afirma que els segments són proporcionals:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$$



Es diu que els triangles *OAC* i *OBD* estan en posició *Tales*. Són **semblants**. Tenen un angle comú (coincident) i els costats proporcionals.

Activitats resoltes

- *Siguen OAC i OBD dos triangles en posició Tales. El perímetre d'OBD és 20 cm, i OA mesura 2 cm, AC mesura 5 cm i OC mesura 3 cm. Calcula les longituds dels costats d'OBD.*

Utilitzem l'expressió: $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD} = \frac{OA + OC + AC}{OB + OD + BD}$ substituint les dades:

$\frac{2}{OB} = \frac{3}{OD} = \frac{5}{BD} = \frac{2+3+5}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, pel que aïllant, sabem que: *OB* = 2·2 = 4 cm; *OD* = 3·2 = 6 cm, i *BD* = 5·2 = 10 cm. En efecte: 4 + 6 + 10 = 20 cm, perímetre del triangle.

- *Conta la llegenda que Tales va mesurar l'altura de la piràmide de Keops comparant l'ombra de la piràmide amb l'ombra del seu bastó. Tenim un bastó que medeix 1 m, si l'ombra d'un arbre medeix 12 m, i la del bastó, (a la mateixa hora del dia i al mateix moment), medeix 0,8 m, quant medeix l'arbre?*

Les altures de l'arbre i del bastó són proporcionals a les seues ombres, (formen triangles en posició *Tales*), pel que, si anomenem *x* a l'altura de l'arbre podem dir:

$\frac{0{,}8}{1} = \frac{12}{x}$. Per tant *x* = 12/0,8 = 15 metres.

Activitats proposades

8. En una foto hi ha un xiquet, que sabem que medeix 1,5 *m*, i un edifici. Mesurem l'altura del xiquet i de l'edifici a la foto, i resulten ser: 0,2 *cm* i 10 *cm*. Quina altura té l'edifici?

9. Es dibuixa un hexàgon regular. Es tracen les seues diagonals i s'obté un altre hexàgon regular. Indica la raó de semblança entre els costats d'ambdós hexàgons.

10. En un triangle regular *ABC* de costat, 1 *cm*, tracem els punts mitjans, *M* i *N*, de dos dels seus costats. Tracem les rectes *BN* i *CM* que es tallen en un punt *O*. Són semblants els triangles *MÀS* i *COB*? Quina és la raó de semblança? Quant mesura el costat *MN*?

11. Una piràmide regular hexagonal de costat de la base 3 *cm* i altura 10 *cm*, es talla per un pla a una distància de 4 *cm* del vèrtex, amb la qual cosa s'obté una nova piràmide. Quant mesuren les seues dimensions?

1.3. Aplicació informàtica per a la comprendre la semblança de triangles

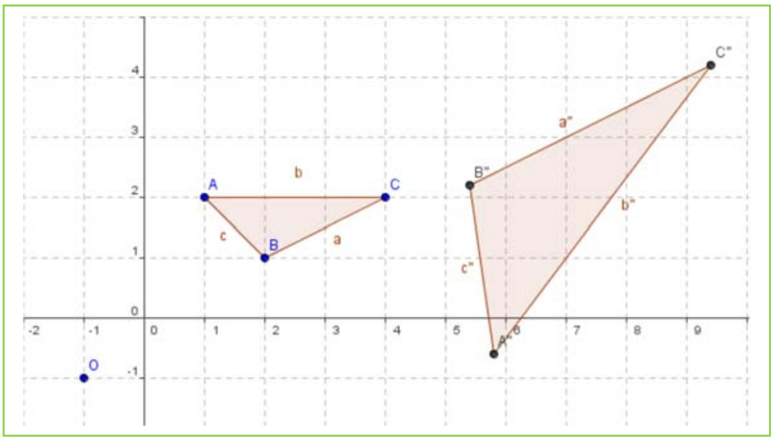
- *Utilitza Geogebra per a analitzar la semblança entre triangles.*

- Obri una nova finestra de *Geogebra*, comprova que apareixen els **Eixos** i la **Quadrícula**.

- Amb la ferramenta **Nou Punt** defineix els punts A (1, 2), B (2, 1) i C (4, 2).

- Utilitza **Polígon** per a dibuixar el triangle ABC.

- Defineix un **Nou Punt** de coordenades (–1, –1), el programa l'anomena D. *Amb* el botó dret del ratolí i l'opció **ReAnomena**, anomena'l O.



- Utilitza la ferramenta **Dilata objecte des de punt indicat, segons factor**, per a dilatar el polígon ABC des del punt O, amb factor 2. S'obté el triangle $A'B'C'$.

- Amb la ferramenta **Reflectix objecte en recta**, dibuixa el simètric del triangle $A'B'C'$ *respecte* al segment *a* del triangle ABC. S'obté el triangle $A''B''C''$.

- Selecciona el polígon $A'B'C'$ a la Finestra algebraica o a l'àrea de treball, i amb el botó dret del ratolí desactiva l'opció **Exposa objecte**, el triangle $A'B'C'$ queda ocult. Observa que pots tornar a visualitzar activant aquesta opció. Oculta de la mateixa manera els punts A', B' *i* C'.

- Perquè les mesures apareguen amb 5 decimals, activa **Posicions decimals** al menú **Opcions** i tria 5.

- Desplaça amb el punter el punt C, de manera que el triangle ABC continue sent un triangle. Es modifiquen ambdós triangles, però es mantenen les seues propietats, continuen sent semblants.

Activitats proposades

12. Justifica que els triangles ABC *i* $A''B''C''$ *són* semblants. Calcula la raó de semblança i la raó entre les seues àrees. Busca una relació entre la raó de semblança i la raó entre les àrees de dos triangles semblants.

13. Per què són semblants els triangles ABC i $A''B''C''$? Observa a la **Finestra algebraica** les longituds dels seus costats i els valors de les seues àrees. Quina és la raó de semblança? Quina és la raó entre les àrees?

14. Dibuixa distints pentàgons i hexàgons que no siguen regulars i amb la ferramenta **Dilata objecte des de punt indicat, segons factor, construeix** altres semblants.

a) Argumenta per què són semblants.

b) Calcula en cada cas la raó de semblança i la raó entre les seues àrees.

c) Investiga com pots trobar la raó entre les àrees de polígons semblants a partir de la raó de semblança.

1.4. Proporcionalitat en longituds, àrees i volums

Ja saps que:

Dues figures són **semblants** si les longituds d'elements corresponents són proporcionals. Al coeficient de proporcionalitat se l'anomena **raó de semblança**. En mapes, plans... a la raó de semblança se l'anomena **escala**.

Àrees de figures semblants

Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, llavors la raó entre les seues àrees és $\boldsymbol{k^2}$.

Exemple:

Observa la figura del marge. Si multipliquem per 2 el costat del

quadrat xicotet, l'àrea del quadrat gran és $2^2 = 4$ vegades

la del xicotet.

Volums de figures semblants

Si la raó de semblança entre les longituds d'una figura és k, llavors entre els seus volums és $\boldsymbol{k^3}$.

Exemple:

Observa la figura del marge. En multiplicar per 2 el costat

del cub xicotet s'obté el cub gran. El volum

del cub gran és 8 (23) el del cub xicotet.

Activitats resoltes

- *La torre Eiffel de París medeix 300 metres d'altura i pesa uns 8 milions de quilos. Està construïda de ferro. Si encarreguem un model a escala de la dita torre, també de ferro, que pese només un quilo, quina altura tindrà? Serà major o menor que un llapis?*

El pes està relacionat amb el volum. La torre Eiffel pesa 8 000 000 quilos, i volem construir una, exactament del mateix material que pese 1 quilo. Per tant $k^3 = 8000000/1 = 8\,000\,000$, i $k = 200$. La raó de proporcionalitat entre les longituds és de 200.

Si la Torre Eiffel medeix 300 m, i anomenem x al que medeix la nostra tenim: $300/x = 200$. Aïllem x que resulta igual a $x = 1{,}5$ m. Medeix metre i mig! És molt major que un llapis!

Activitats proposades

15. El diàmetre d'una bresquilla és tres vegades major que el del seu os, i mesura 8 cm. Calcula el volum de la bresquilla, suposant que és esfèric, i el del seu os, també esfèric. Quina és la raó de proporcionalitat entre el volum de la bresquilla i el de l'os?

16. A la pizzeria tenen pizzes de diversos preus: 1 €, 2 € i 3 €. Els diàmetres d'aquestes pizzes són: 15 cm, 20 cm i 30 cm, quina resulta més econòmica? Calcula la relació entre les àrees i compara-la amb la relació entre els preus.

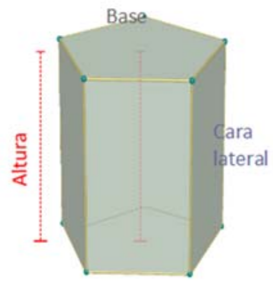
17. Una maqueta d'un dipòsit cilíndric de 1000 litres de capacitat i 5 metres d'altura, volem que tinga una capacitat d'1 litre. Quina altura ha de tindre la maqueta?

2. LONGITUDS, ÀREES I VOLUMS

2.1. Longituds, àrees i volums en prismes i cilindres

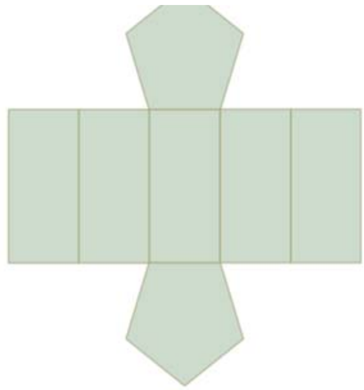
Recorda que:

Prismes



Un ***prisma*** és un poliedre determinat per dues cares paral·leles que són polígons iguals i tantes cares laterals, que són paral·lelograms, com a costats tenen les bases.

Àrees lateral i total d'un prisma.



L'àrea lateral d'un prisma és la suma de les àrees de les cares laterals.

Com les cares laterals són paral·lelograms de la mateixa altura, que és l'altura del prisma, podem escriure:

Àrea lateral = Suma de les àrees de les cares laterals =

Perímetre de la base · altura del prisma.

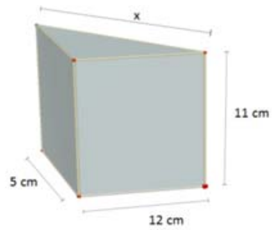
Si denotem per h l'altura i per P_B el perímetre de la base:

$$\text{Àrea lateral} = A_L = P_B \cdot h$$

L'àrea total d'un prisma és l'àrea lateral més el doble de la suma de l'àrea de la base:

$$\text{Àrea total} = A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

Activitats resoltes



- *Calcula les àrees lateral i total d'un prisma triangular recte d'11 cm d'altura si la seua base és un triangle rectangle de catets 12 cm i 5 cm.*

Calculem en primer lloc la hipotenusa del triangle de la base:

$$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

$$P_B = 12 + 5 + 13 = 30 \text{ cm}; \; A_B = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

$$A_L = P_B \cdot h = 30 \cdot 11 = 330 \text{ cm}^2 \qquad A_T = A_L + 2 \cdot A_B = 330 + 60 = 390 \text{ cm}^2$$

Volum d'un cos geomètric. Principi de *Cavalieri*.

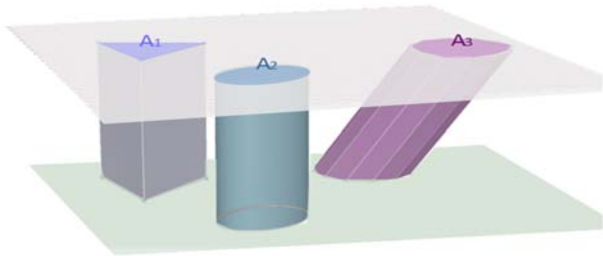
Recorda que:

Bonaventura Cavalieri, matemàtic del segle XVII va enunciar el principi que porta el seu nom i que afirma:

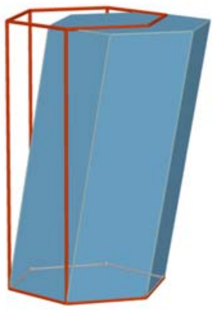
"Si dos cossos tenen la mateixa altura i en tallar-los per plans paral·lels a les seues bases, s'obtenen seccions amb el mateix àrea, llavors els volums dels dos cossos són iguals"

Exemple:

A la figura adjunta les àrees de les seccions A_1, A_2, A_3, produïdes per un pla paral·lel a les bases, són iguals, llavors, segons aquest principi els volums dels tres cossos són també iguals.



Volum d'un prisma i d'un cilindre



El volum d'un prisma recte és el producte de l'àrea de la base per l'altura. A més, segons el principi de *Cavalieri*, el volum d'un prisma oblic coincideix amb el volum d'un prisma recte amb la mateixa base i altura. Si denotem per *V* aquest volum, A_B l'àrea de la base i *h* l'altura:

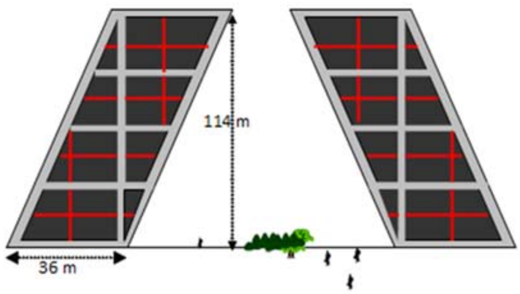
Volum prisma = $V = A_B \cdot h$

També el volum d'un cilindre, recte o oblic és àrea de la base per altura. Si anomenem *R* al radi de la base, A_B l'àrea de la base i *h* l'altura, el volum s'escriu:

Volum cilindre = $V = A_B \cdot h = \pi R^2 \cdot h$

Activitats resoltes

- Les conegudes torres Kio de Madrid són dues torres bessones que estan en el Passeig de la Castellana, junt amb la Plaça de Castella. Es caracteritzen per la seua inclinació i representen una porta cap a Europa.



Cadascuna d'elles és un prisma oblic la base del qual és un quadrat de 36 metres de costat i tenen una altura de 114 metres. El volum interior de cada torre pot calcular-se amb la fórmula anterior:

$$V = A_B \cdot h = 36^2 \cdot 114 = 147\ 744\ m^3$$

Activitats proposades

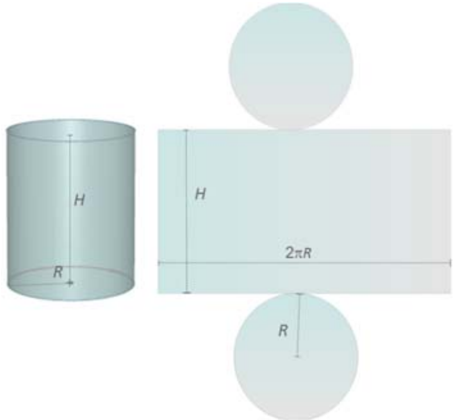
18. Calcula el volum d'un prisma recte de 20 *dm* d'altura la base del qual és un hexàgon de 6 *dm* de costat.

19. Calcula la quantitat d'aigua que hi ha en un recipient amb forma de cilindre sabent que la seua base té 10 *cm* de diàmetre i que l'aigua arriba a 12 *dm* d'altura.

Àrees lateral i total d'un cilindre.

El cilindre és un cos geomètric desenrotllable. Si retallem un cilindre recte al llarg d'una generatriu, i l'estenem en un pla, obtenim dos cercles i una regió rectangular. D'aquesta manera s'obté el seu desenrotllament.

A partir d'aquest, podem veure que l'àrea **lateral de cilindre està** determinada per l'àrea del rectangle que té com a dimensions la longitud de la circumferència de la base i l'altura del cilindre.



Suposarem que l'altura del cilindre és H i que R és el radi de la base amb el que l'àrea lateral A_L és:

$$A_L = \text{Longitud de la base} \cdot \text{Altura} = (2\pi\ R) \cdot H = 2\pi RH$$

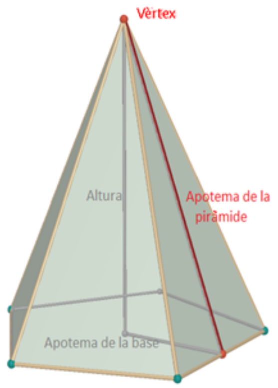
Si a l'expressió anterior li sumem l'àrea dels dos cercles que constitueixen les bases, obtenim l'àrea **total del cilindre.**

$$A_T = A_L + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

2.2. Longituds, àrees i volums en piràmides i cons

Recorda que:

Àrees lateral i total d'una piràmide i d'un tronc de piràmide regulars.

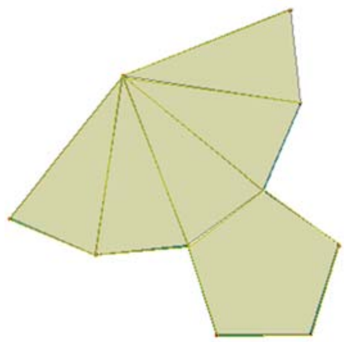


Una **piràmide** és un poliedre determinat per una cara poligonal denominada base i tantes cares triangulars amb un vèrtex comú com a costats té la base.

L'àrea lateral d'una piràmide regular és la suma de les àrees de les cares laterals.

Són triangles isòsceles iguals pel que, si l'aresta de la base mesura b, l'apotema de la piràmide és Ap i la base té n costats, aquest àrea lateral és:

Desenrotllament de piràmide pentagonal regular



$$\text{Àrea lateral} = A_L = n \cdot \frac{b \cdot Ap}{2} = \frac{n \cdot b \cdot Ap}{2}$$

i com $n \cdot b$ =Perímetre de la base

$$A_L = \frac{Perímetredelabase \cdot Apotemadelapiràmide}{2} = \frac{Perímetredelabase}{2} \cdot Apotema$$

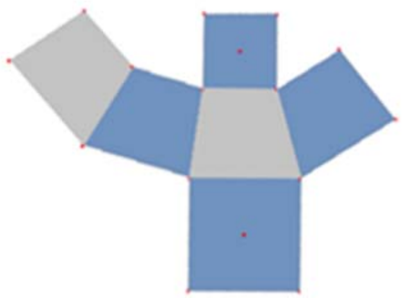
L'àrea lateral d'una piràmide és igual al semi-perímetre per l'apotema.

L'àrea total d'una piràmide és l'àrea lateral més l'àrea de la base:

$$\text{Àrea total} = A_T = A_L + A_B$$

Un tronc de piràmide regular és un cos geomètric desenrotllable. Al seu desenrotllament apareixen tantes cares laterals com a costats tenen les bases. Totes elles són trapezis isòsceles.

Desenrotllament de tronc de piràmide quadrangular



Si *B* és el costat del polígon de la base major, *b* el costat de la base menor, *n* el nombre de costats de les bases i *Ap* és l'altura d'una cara lateral

$$\text{Àrea lateral} = A_L = n \cdot \frac{(B+b).Ap}{2} = \frac{(P_B+P_b).Ap}{2} =$$

$$= \frac{Suma\,del\,perímetre\,de\,les\,bases \cdot Apotema\,del\,tronc}{2}$$

L'àrea total d'un tronc de piràmide regular és l'àrea lateral més la suma d'àrees de les bases:

$$\text{Àrea total} = A_T = A_L + A_B + A_b$$

Activitats resoltes

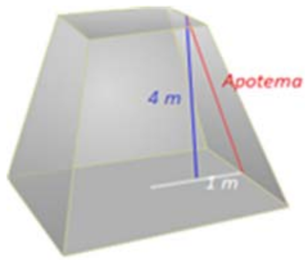
- *Calculem l'àrea total d'un tronc de piràmide regular de 4 m d'altura si sabem que les bases paral·leles són quadrats de 4 m i de 2 m de costat.*

En primer lloc calculem el valor de l'apotema. Tenint en compte que el tronc és regular i que les bases són quadrades es forma un triangle rectangle en què es compleix:

$$Ap^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \Rightarrow Ap = \sqrt{17} \approx 4{,}12\ m$$

$$A_L = \frac{(P_B+P_b)\cdot Ap}{2} = \frac{(16+8)\cdot 4{,}12}{2} = 49{,}44\ m^2$$

$$A_T = A_L + A_B + A_b = 49{,}44 + 16 + 4 = 69{,}44\ m^2$$



Activitats proposades

20. Calcula les àrees lateral i total d'un prisma hexagonal regular sabent que les arestes de les bases mesuren 3 *cm* i cada aresta lateral 2 *dm*.

21. L'àrea lateral d'un prisma regular de base quadrada és 16 m^2 i té 10 *m* d'altura. Calcula el perímetre de la base.

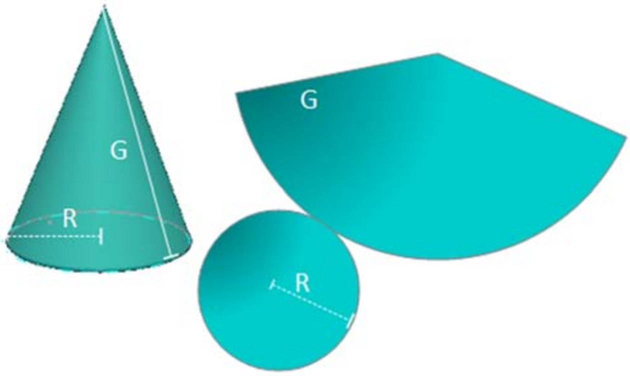
22. El costat de la base d'una piràmide triangular regular és de 7 *cm* i l'altura de la piràmide 15 *cm*. Calcula l'apotema de la piràmide i la seua àrea total.

23. Calcula l'àrea lateral d'un tronc de piràmide regular, sabent que les seues bases són dos octògons regulars de costats 3 i 8 *dm* i que l'altura de cada cara lateral és de 9 *dm*.

24. Si l'àrea lateral d'una piràmide quadrangular regular és 104 cm^2, calcula l'apotema de la piràmide i la seua altura.

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Àrees lateral i total d'un con.



Recorda que:

També el con és un cos geomètric desenrotllable. En retallar seguint una línia generatriu i la circumferència de la base, obtenim un cercle i un sector circular amb radi igual a la generatriu i longitud d'arc igual a la longitud de la circumferència de la base.

Anomenem ara *R* al radi de la base i *G* a la generatriu. L'àrea lateral del con és l'àrea de sector circular obtingut. Per a calcular-la pensem que aquesta àrea ha de ser directament proporcional a la longitud d'arc que al seu torn ha de coincidir amb la longitud de la circumferència de la base. Podem escriure aleshores:

$$\frac{ALateraldelcon}{Longitudd'arccorresponenalsector} = \frac{AtotaldelcerclederadiG}{LongituddelacircumferènciaderadiG}$$

És a dir: $\frac{A_L}{2\pi R} = \frac{\pi\ G^2}{2\pi G}$ i aïllant A_L tenim:

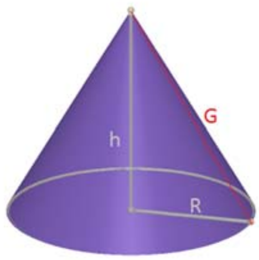
$$A_L = \frac{2\pi R\ \pi\ G^2}{2\pi G} = \pi RG$$

Si a l'expressió anterior li sumem l'àrea del cercle de la base, obtenim l'àrea **total del con.**

$$\boldsymbol{A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2}$$

Activitats resoltes

- *Calcula l'àrea total d'un con de 12 dm d'altura, sabent que la circumferència de la base mesura 18,84 dm .(Pren 3,14 com a valor de π)*



Calculem en primer lloc el radi *R* de la base:

$$2\pi R = 18{,}84 \Rightarrow \quad R = \frac{18{,}84}{2\pi} \approx \frac{18{,}84}{6{,}28} = 3 \text{ dm.}$$

Calculem ara la generatriu *G*:

$$G = \sqrt{R^2 + h^2} \Rightarrow \quad G = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} \approx 12{,}37 \text{ dm.}$$

Doncs $A_T = A_L + \pi \cdot R^2 = \pi \cdot R \cdot G + \pi \cdot R^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12{,}37 + 3{,}14 \cdot 3^2 \approx 144{,}79\ dm^2$.

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

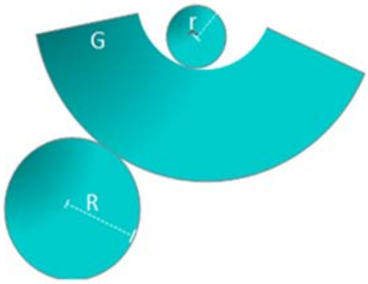
Àrees lateral i total d'un tronc de con.

Recorda que:

En tallar un con per un pla paral·lel a la base, s'obté un tronc de con. Igual que el tronc de piràmide, és un cos desenrotllable i el seu desenrotllament el constitueixen els dos cercles de les bases junt amb un trapezi circular, les bases del qual corbes mesuren el mateix que les circumferències de les bases.

Anomenant *R i r* als radis de les bases i *G* a la generatriu resulta:

$$A_L = \frac{(2\pi R + 2\pi r)G}{2} = \frac{2(\pi R + \pi r)G}{2} = (\pi R + \pi r)G$$



Si a l'expressió anterior li sumem les àrees dels cercles de les bases, obtenim l'àrea **total del tronc de con:**

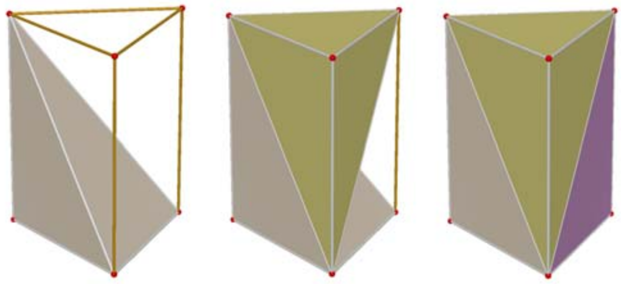
$$A_T = A_L + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2$$

Volum d'una piràmide i d'un con.

Recorda que:

També als casos d'una piràmide o con, les fórmules del volum coincideixen en cossos rectes i oblics.

El volum d'una piràmide és la tercera part del volum d'un prisma que té la mateixa base i altura.



$$\text{Volum piràmide} = V = \frac{A_B \cdot h}{3}$$

Si comparem con i cilindre amb la mateixa base i altura, concloem un resultat anàleg

$$\text{Volum con} = V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

Volum d'un tronc de piràmide i d'un tronc de con.

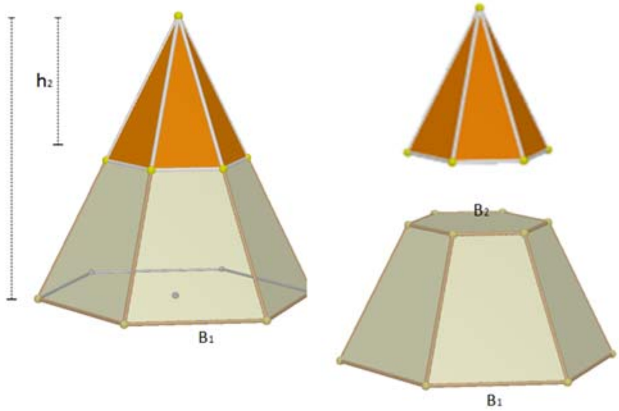
Hi ha una fórmula per a calcular el volum d'un tronc de piràmide regular però l'evitarem. Resulta més senzill obtindre el volum d'un tronc de piràmide regular restant els volums de les dues piràmides a partir de les que s'obté.

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Si representem per A_{B1} i A_{B2} els àrees dels bases i per h_1 i h_2 els altures dels piràmides esmentades, el volum del tronc de piràmide és:

Volum tronc de piràmide =

$$V = \frac{A_{B1}\cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2}\cdot h_2}{3}$$



El volum del tronc de amb s'obté de manera semblant. Si R_1 i R_2 són els radis dels bases dels cons que originen el tronc i h_1 i h_2 els seues altures, el volum del tronc de amb resulta:

$$\text{Volum tronc de con} = V = \frac{\pi\cdot R_1^2\cdot h_1}{3} - \frac{\pi\cdot R_2^2\cdot h_2}{3}$$

Activitats resoltes

- *Calcula el volum d'un tronc de piràmide regular de 10 cm d'altura si les seues bases són dos hexàgons regulars de costats 8 cm i 3 cm.*

Primer pas: calculem les apotemes dels hexàgons de les bases:

Per a cada un d'aquests hexàgons:

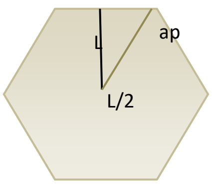


Figura 1

$L^2 = ap^2 + (L/2)^2 \Rightarrow ap^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} = \frac{3L^2}{4} \Rightarrow ap = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$

Per tant les apotemes buscades mesuren: $ap_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6\ cm$; $ap_2 = \frac{7\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}1\ cm$

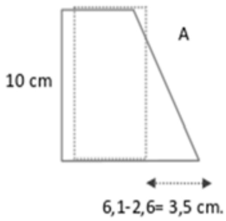


Figura 2

Com a segon pas, calculem l'apotema del tronc de piràmide

$A^2 = 10^2 + 3{,}5^2 \Rightarrow$

$A = \sqrt{112{,}25} \approx 10{,}6\ cm$

En tercer lloc, calculem el valor dels segments *x, y* de la figura 3 que ens serviran per a obtindre les altures i apotemes de les piràmides que generen el tronc amb què treballem:

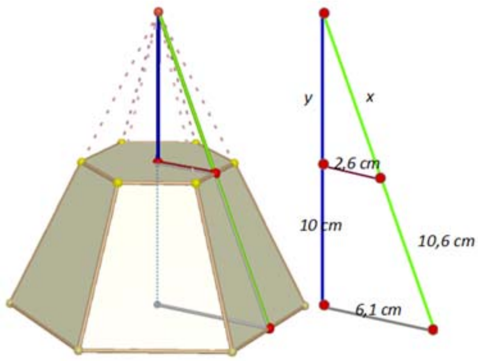


Figura 3

Pel teorema de *Tales*: $\frac{x}{2{,}6} = \frac{10{,}6 + x}{6{,}1} \Rightarrow 6{,}1\,x = (10{,}6 + x)2{,}6 \Rightarrow$

$6{,}1\,x - 2{,}6x = 27{,}56 \Rightarrow x = \frac{27{,}56}{3{,}5} \approx 7{,}9\,cm$

Llavors l'apotema de la piràmide gran és 10,6 + 7,9=18,5 cm i el de la xicoteta 7,9 *cm*. I aplicant el teorema de *Pitàgores*:

$$y^2 = x^2 - 2{,}6^2 = 7{,}9^2 - 2{,}6^2 = 55{,}65 \Rightarrow y = \sqrt{55{,}65} \approx 7{,}5 \text{ cm}$$

Per tant les altures de les piràmides generadores del tronc mesuren 10 + 7,5 = 17,5 *cm* i 7,5 *cm.*

Finalment calculem el volum del tronc de piràmide:

$$V = \frac{A_{B1} \cdot h_1}{3} - \frac{A_{B2} \cdot h_2}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{48 \cdot 18{,}5 \cdot 17{,}5}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{18 \cdot 7{,}9 \cdot 7{,}5}{2} = \frac{15540}{6} - \frac{1066.5}{6} = 2412{,}25 \, cm^3$$

Activitats proposades

25. Una columna cilíndrica té 35 *cm* de diàmetre i 5 *m* d'altura. Quina és la seua àrea lateral?

26. El radi de la base d'un cilindre és de 7 *cm* i l'altura és el triple del diàmetre. Calcula la seua àrea total.

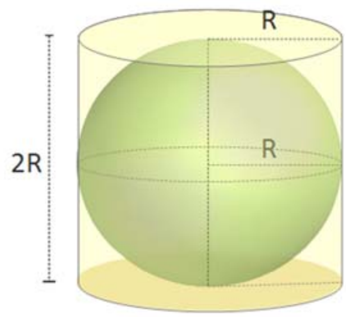
27. Calcula l'àrea lateral d'un con recte sabent que la seua generatriu mesura 25 *dm* i el seu radi de la base 6 *dm*.

28. La circumferència de la base d'un con mesura 6,25 m i la seua generatriu 12 *m*. Calcula l'àrea total.

2.3. Longituds, àrees i volums en l'esfera

Recorda que:

Àrea d'una esfera.



L'esfera **no** és un cos geomètric desenrotllable, per la qual cosa és més complicat que als casos anteriors trobar una fórmula per a calcular la seua àrea.

Arquimedes va demostrar que l'àrea d'una esfera és igual que l'àrea lateral d'un cilindre circumscrit a l'esfera, és a dir un cilindre amb el mateix radi de la base que el radi de l'esfera i l'altura del qual és el diàmetre de l'esfera.

Si anomenem *R* al radi de l'esfera:

$$A_T = (2\pi R) \cdot (2R) = 4\pi R^2$$

L'àrea d'una esfera equival a l'àrea de quatre cercles màxims.

Activitats proposades

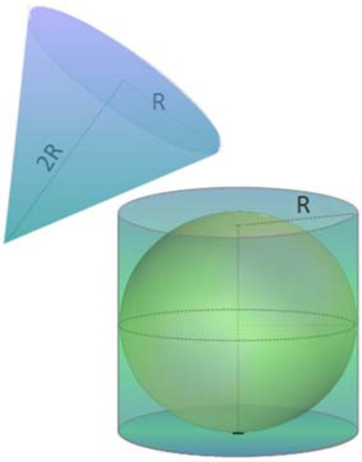
29. Una esfera té 4 *m* de radi. Calcula:

a) La longitud de la circumferència màxima;

b) L'àrea de l'esfera.

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

Volum de l'esfera



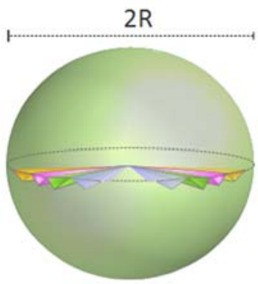
Tornem a pensar en una esfera de radi R i en el cilindre que la circumscriu. Per a omplir amb aigua l'espai que queda entre el cilindre i l'esfera, es necessita una quantitat d'aigua igual a un terç del volum total del cilindre circumscrit.

Es dedueix llavors que la suma dels volums de l'esfera de radi R i del con d'altura *2R* i radi de la base R, coincideix amb el volum del cilindre circumscrit a l'esfera de radi R. Per tant:

$$\text{Volum}_{\text{ esfera}} = \text{Volum}_{\text{ cilindre}} - \text{Volum}_{\text{ con}} \Rightarrow$$

$$\text{Volum}_{\text{ esfera}} = \pi R^2 (2R) - \frac{\pi R^2 (2R)}{3} = \frac{6\pi R^3 - 2\pi R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Hi ha demostracions més rigoroses que avalen aquest resultat experimental que hem descrit. Així per exemple, el volum de l'esfera es pot obtindre com a suma dels volums de piràmides que la recobreixen, totes elles de base triangular sobre la superfície de l'esfera i amb vèrtex en el centre de la mateixa.



Activitats proposades

30. (CDI Madrid 2008) El dipòsit de gasoil de la casa d'Irene és un cilindre d'1 *m* d'altura i 2 *m* de diàmetre. Irene ha telefonat al subministrador de gasoil perquè en el dipòsit només queden 140 litres.

a. Quin és, en dm^3, el volum del dipòsit? (Utilitza 3,14 com a valor de π).

b. Si el preu del gasoil és de 0,80 € cada litre, quant haurà de pagar la mare d'Irene per omplir el dipòsit?

31. Comprova que el volum de l'esfera de radi 4 *dm* sumat amb el volum d'un con del mateix radi de la base i 8 *dm* d'altura, coincideix amb el volum d'un cilindre que té 8 *dm* d'altura i 4 *dm* de radi de la base.

2.4. Longituds, àrees i volums de poliedres regulars

Recorda que:

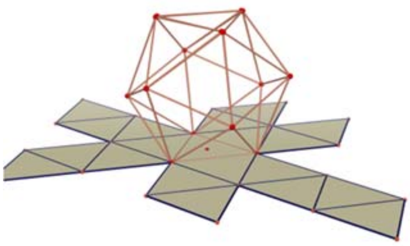
Un poliedre regular és un poliedre en què totes les seues cares són polígons regulars iguals i en el que els seus angles poliedres són iguals.

Hi ha cinc poliedres regulars: tetràedre, octàedre, icosàedre, cub i dodecàedre

Àrea total d'un poliedre regular.

Com les cares dels poliedres regulars són iguals, el càlcul de l'àrea total d'un poliedre regular es redueix a calcular l'àrea d'una cara i després multiplicar-la pel nombre de cares.

Activitats resoltes



- *Calcula l'àrea total d'un icosàedre de 2 cm d'aresta.*

Totes les seues cares són triangles equilàters de 2 *cm* de base. Calculem l'altura *h* que divideix a la base en dos segments iguals

$$h^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3} \text{ cm}$$

Per tant l'àrea d'una cara és:

$A_{triangle} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ cm^2 i per tant Àrea icosàedre = $20\sqrt{3} cm^2$

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

3. INICIACIÓ A LA GEOMETRIA ANALÍTICA

3.1. Punts i vectors

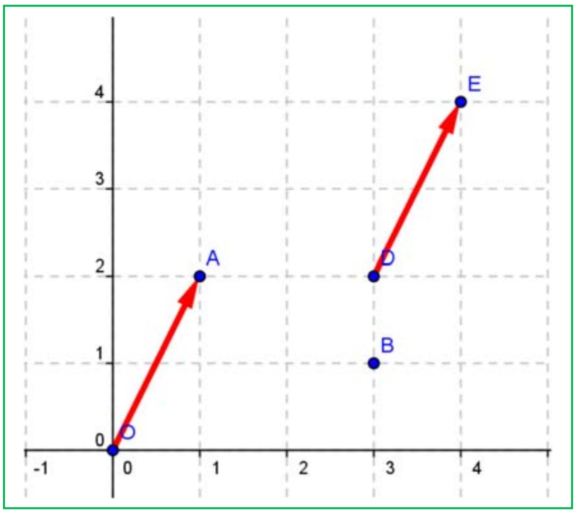
Al pla

Ja saps que

Un conjunt format per **l'origen** *O*, els dos eixos **de coordenades** i la **unitat de mesura** és un **sistema de referència cartesià**.

Les **coordenades d'un punt** *A* són un parell ordenat de nombres reals **(*x*, y)**, sent "***x***" la primera coordenada o **abscissa** i "***y***" la segona coordenada o **ordenada**.

Donats dos punts, $D(d_1, d_2)$ i $E(e_1, e_2)$, les components del vector d'origen *D* i extrem *E*, ***DE***, vénen donades per ***DE***$=(e_1 - d_1, e_2 - d_2)$.



Exemple:

Les coordenades dels punts, de la figura són:

O(0, 0), *A*(1, 2), *B*(3, 1), *D*(3, 2) i *E*(4, 4)

Les components del vector ***DE*** són

DE = (4 – 3, 4 – 2) = (1, 2)

Les components del vector ***OA*** són:

OA = (1 – 0, 2 – 0) = (1, 2).

DE i ***OA*** són representants del mateix vector lliure de components (1, 2).

A l'espai de dimensió tres

Les **coordenades d'un punt** *A* són una terna ordenada de nombres reals **(*x*, y, *z*)**, sent "***z*" *l'altura*** sobre el pla *OXY*.

Donats dos punts, $D(d_1, d_2, d_3)$ i $E(e_1, e_2, e_3)$, les components del vector d'origen *D* i extrem *E*, ***DE***, vénen donades per ***DE*** $= (e_1 - d_1, e_2 - d_2, e_3 - d_3)$.

Exemple:

Les coordenades de punts en l'espai són:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) i *E*(4, 4, 4)

Les components del vector ***DE*** són: ***DE*** = (4 – 3, 4 – 2, 4 – 1) = (1, 2, 3)

Les components del vector ***OA*** són: ***OA*** = (1 – 0, 2 – 0, 3 – 0) = (1, 2, 3).

DE i ***OA*** són representants del mateix vector lliure de components (1, 2, 3)

Activitats proposades

32. Representa en un sistema de referència a l'espai de dimensió tres els punts:

O(0, 0, 0), *A*(1, 2, 3), *B*(3, 1, 7), *D*(3, 2, 1) i *E*(4, 4, 4) i vectors: ***DE*** i ***OA***.

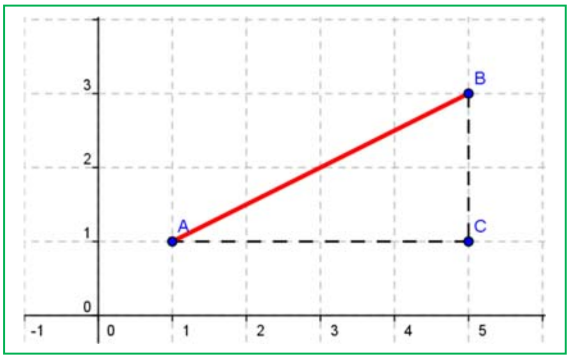
33. El vector de components ***u*** = (2, 3) i origen *A* = (1, 1), quin extrem té?

3.2. Distància entre dos punts

Al pla

La distància entre dos punts $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$ és:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Exemple:

Pel Teorema de *Pitàgores* sabem que la distància al quadrat entre els punts $A = (1, 1)$ i $B = (5, 3)$ és igual a:

$$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

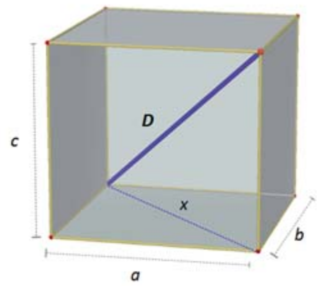
ja que el triangle *ABC* és rectangle de catets 4 i 2.

Per tant $D \approx 4{,}47$.

A l'espai de dimensió tres

La distància entre dos punts $A(a_1, a_2, a_3)$ i $B(b_1, b_2, b_3)$ és igual a:

$$D = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



Exemple:

La distància al quadrat entre els punts $A = (1, 1, 2)$ i $B = (5, 3, 8)$ és igual, pel Teorema de *Pitàgores* a l'espai, a

$$D^2 = (5 - 1)^2 + (3 - 1)^2 + (8 - 2)^2 = 4^2 + 2^2 + 6^2 = 16 + 4 + 36 = 56.$$

Per tant $D \approx 7{,}5$.

Activitats proposades

34. Calcula la distància entre els punts $A(6, 2)$ i $B(3, 9)$.

35. Calcula la distància entre els punts $A(6, 2, 5)$ i $B(3, 9, 7)$.

36. Calcula la longitud del vector de components $\boldsymbol{u} = (3, 4)$

37. Calcula la longitud del vector de components $\boldsymbol{u} = (3, 4, 1)$.

38. Dibuixa un quadrat de diagonal el punt $O(0, 0)$ i $A(3, 3)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del quadrat? Calcula la longitud del costat i de la diagonal del dit quadrat.

39. Dibuixa un cub de diagonal $O(0, 0, 0)$ i $A(3, 3, 3)$. Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del cub? Ja saps, són 8 vèrtexs. Calcula la longitud de l'aresta, de la diagonal d'una cara i de la diagonal del cub.

40. Siga $X(x, y)$ un punt genèric del pla, i $O(0, 0)$ l'origen de coordenades, escriu l'expressió de tots els punts X que disten de O una distància D.

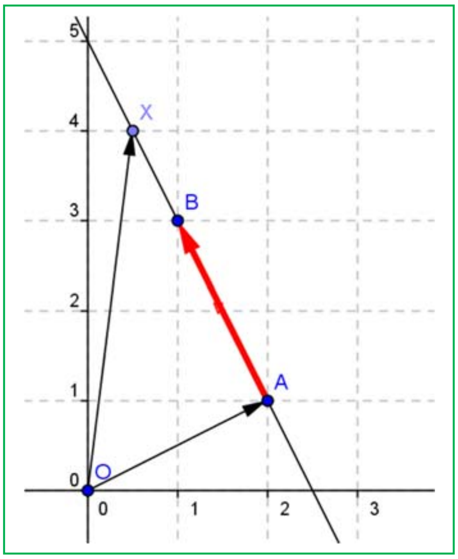
41. Siga $X(x, y, z)$ un punt genèric de l'espai, i $O(0, 0, 0)$ l'origen de coordenades, escriu l'expressió de tots els punts X que disten de O una distància D.

3.3. Equacions i rectes i plans

Equacions de la recta al pla.

Ja saps que **l'equació d'una recta** al pla és: $y = mx + n$. És l'expressió d'una recta com a funció. Aquesta equació es denomina **equació explícita** de la recta.

Si passem tot al primer membre de l'equació, ens queda una equació: $ax + by + c = 0$, que es denomina **equació implícita** de la recta.



Equació vectorial: També una recta queda determinada si coneixem un punt: $A(a_1, a_2)$ i un vector de direcció $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Observa que el vector ***OX*** pot escriure's com a suma del vector ***OA*** i d'un vector de la mateixa direcció que ***v***, *t**v***. És a dir:

$$\boldsymbol{OX} = \boldsymbol{OA} + t\boldsymbol{v},$$

on a *t* se li denomina paràmetre. Per a cada valor de *t*, es té un punt diferent de la recta. Amb coordenades quedaria:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$$

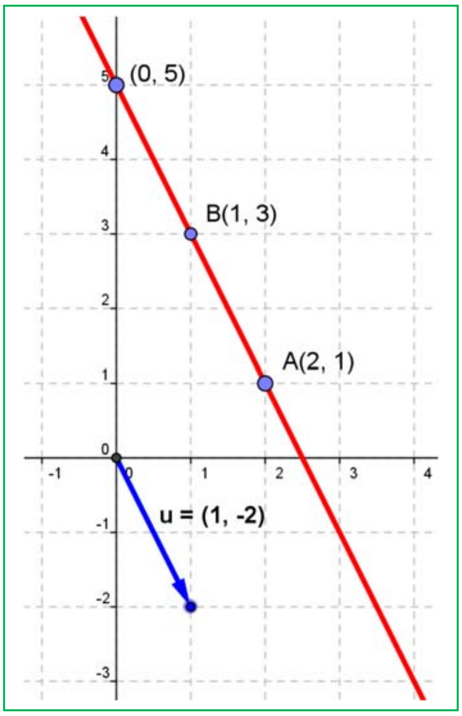
que és **l'equació paramètrica** de la recta.

Activitats resoltes

- *De la recta d'equació explícita* $y = -2x + 5$, coneixem el pendent, -2, i l'ordenada a l'origen, 5. El pendent ens dóna un vector de direcció de la recta, en general $(1, m)$, i en aquest exemple: $(1, -2)$. L'ordenada a l'origen ens proporciona un punt, en general, el $(0, n)$, i en aquest exemple, $(0, 5)$. L'equació paramètrica d'aquesta recta és:

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$$

La seua equació implícita és: $-2x - y + 5 = 0$.



- *Escriu l'equació paramètrica de la recta* que passa pel punt $A(2, 1)$ i té com a vector de direcció $\boldsymbol{v} = (1, 2)$.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

- *Escriu l'equació de la recta* que passa pels punts $A(2, 1)$ i $B(1, 3)$. Podem prendre com a vector de direcció el vector $\boldsymbol{AB} = (1-2, 3-1) = (-1, 2)$, i escriure la seua equació paramètrica:

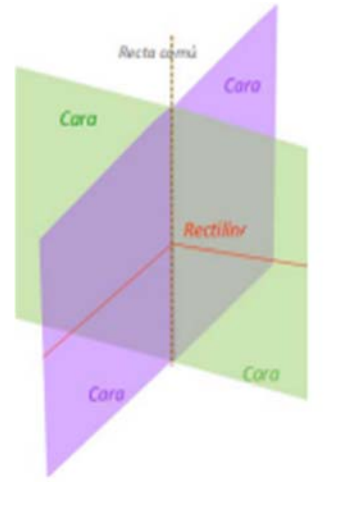
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

La recta és, als tres exemples, la mateixa, la de la figura. Amb això podem observar que una recta pot tindre moltes equacions paramètriques depenent del punt i del vector de direcció que es prenga. Però eliminant el paràmetre i aïllant "*y*" arribem a una única equació explícita.

Activitats proposades

42. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(6, 2)$ i $B(3, 9)$, de forma explícita, implícita i paramètrica. Representa-la gràficament.

Equacions de la recta i el pla en l'espai.



***L'equació implícita* d'un pla** és :ax +*by* + *cz* + d =*0* . Observa que és pareguda a l'equació implícita de la recta però amb una component més.

L'**equació vectorial d'una recta** a l'espai és: ***OX*** = ***OA*** + ***tv***, aparentment igual a l'equació vectorial d'una recta al pla, però en escriure les coordenades, ara punts i vectors té tres components:

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

Una recta també pot vindre donada com a intersecció de dos plans:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Dos punts determinen una recta i tres punts determinen un pla.

Activitats resoltes

- *Escriu l'equació de la recta en l'espai que passa pels punts A(1, 2, 3) i B(3, 7, 1).*

Prenem com a vector de direcció de la recta el vector ***AB*** = (3 – 1, 7 – 2, 1 – 3) = (2, 5, –2) i com a punt, per exemple el *A*, llavors:

$$\begin{cases} x = 1 + t2 \\ y = 2 + t5 \\ z = 3 - t2 \end{cases}$$

Podem trobar les equacions de dos plans que es tallen en dita recta, eliminant *t* en dues equacions. Per exemple, sumant la primera amb la tercera es té: $x + z = 4$. Multiplicant la primera equació per 5, la segona per 2 i restant, es té: $5x - 2y = 1$. Per tant una altra equació de la recta, com a intersecció de dos plans és:

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

- *Escriu l'equació del pla que passa pels punts A i B de l'activitat anterior, i C(2, 6, 2).*

Imposem a l'equació $ax + by + cz + d = 0$ que passe pels punts donats:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$3a + 7b + c + d = 0$

$2a + 6b + 2c + d = 0.$

Restem a la segona equació la primera, i a la tercera, també la primera:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$2a + 5b - 2c = 0$

$a + 4b - c = 0$

Multipliquem per 2 la tercera equació i li restem la segona:

$a + 2b + 3c + d = 0$

$a + 4b - c = 0$

$3b = 0$

Ja coneixem un coeficient, $b = 0$. Ho substituïm a les equacions:

$a + 3c + d = 0$

$a \ - c = 0$

Veiem que $a = c$, que substituït a la primera: $4c + d = 0$. Sempre, en tindre 3 equacions i 4 coeficients, tindrem una situació com l'actual, en que la podem resoldre excepte un factor de proporcionalitat. Si c=1, llavors $d = -4$. Per tant $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ i $d = -4$. És el pla d'equació:

$$x + z = 4$$

pla que ja havíem obtingut a l'activitat anterior.

Activitats proposades

43. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts $A(6, 2, 5)$ i $B(3, 9, 7)$, de forma explícita, i com a intersecció de dos plans.

44. Escriu les equacions dels tres plans coordenats.

45. Escriu les equacions dels tres eixos coordenats a l'espai.

46. En el cub de diagonal $O(0, 0, 0)$ i $A(6, 6, 6)$ escriu les equacions dels plans que formen les seues cares. Escriu les equacions de totes les seues arestes, i les coordenades dels seus vèrtexs.

3.4. Algunes equacions

Activitats resoltes

- Quins punts verifiquen l'equació $x^2 + y^2 = 1$?

Depèn! Depèn de si estem en un pla o a l'espai.

Al pla, podem veure l'equació com que el quadrat de la distància d'un punt genèric $X(x, y)$ a l'origen $O(0,0)$ és sempre igual a 1:

$$D^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

El lloc de tots els punts del pla que disten 1 de l'origen és la circumferència de centre $O(0, 0)$ i radi 1.

A l'espai el punt genèric $X(x, y, z)$ té tres coordenades, i $O(0, 0, 0)$, també. No és una circumferència, ni una esfera. I què és? El que està clar és que si tallem pel pla OXY, ($z = 0$) tenim la circumferència anterior. I si tallem pel pla $z = 3$? També una circumferència. És un cilindre. El cilindre d'eix, l'eix vertical, i de radi de la base 1.

- Quins punts verifiquen l'equació $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

Ara sí. Sí que podem aplicar la distància d'un punt genèric $X(x, y, z)$ a l'origen $O(0, 0, 0)$,

$$D^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

És l'equació de la superfície esfèrica de centre l'origen i radi 1.

Activitats proposades

47. Escriu l'equació del cilindre d'eix l'eix OZ i radi 2.

48. Escriu l'equació de l'esfera de centre l'origen de coordenades i radi 2.

49. Escriu l'equació del cilindre d'eix, la recta $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ i radi 1.

50. Escriu l'equació de la circumferència al pla de centre $A(2, 5)$ i radi 2.

51. En tallar a un cert cilindre per un pla horitzontal es té la circumferència de l'exercici anterior. Escriu l'equació del cilindre.

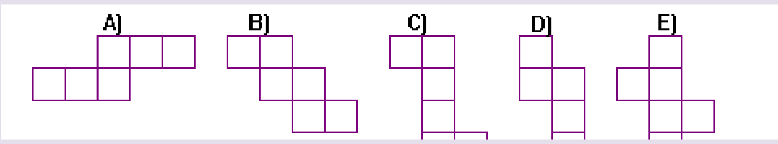
CURIOSITATS. REVISTA

Grace Chisholm Young (1868 - 1944)

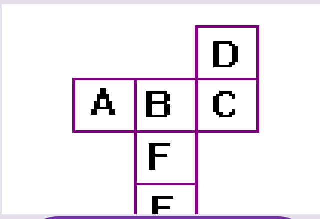
Grace Chisholm Young va nàixer el 15 de març de 1868, prop de Londres, Anglaterra, durant el regnat de la reina Victòria. Per a fer-nos una Idea sobre l'estat de l'educació en aqueixa època recordem que cap a 1881, el 20 % de la població d'Anglaterra encara no sabia escriure el seu nom. Era la més xicoteta de quatre germans (tres supervivents) i també la més consentida. Només li ensenyaven el que volia aprendre i en aquest sentit la seua educació va ser un tant informal. Li agradava el càlcul mental i la música. No obstant això va ser una preparació suficient per a, als 17 anys, passar els exàmens de *Cambridge* (*Cambridge Senior Examination*). Va estudiar Matemàtiques però per a doctorar-se va anar a *Göttingen* on es va doctorar en 1895. En 1896 es va casar amb *William Young* amb el que va tindre sis fills. Va ocupar molt del seu temps en l'educació dels seus fills.

Va escriure llibres i molts articles. Va escriure ***Primer llibre de Geometria*** En ell *Grace* escrivia que la geometria en dimensió tres rebia, en primària i en secundària, molta menys atenció que la geometria al pla. Opinava que açò no havia de ser així perquè *"en un cert sentit la geometria plana és més abstracta que la tridimensional"*, perquè considerava que la geometria tridimensional era més natural. Però admetia, no obstant això, molt difícil representar figures tridimensionals en una superfície bidimensional com és una pàgina d'un llibre, i considerava que aquesta era la raó per la no es treballava (i actualment tampoc es treballa) adequadament. *Grace* opinava que l'alumnat havia de construir figures espacials, per la qual cosa va incloure al seu llibre molts diagrames de figures tridimensionals per a ser retallats i construïts. Opinava que aqueixa era la forma en què l'alumnat havia de familiaritzar-se amb les propietats d'aquestes figures i que utilitzant-les, amb la seua ajuda, podia visualitzar els teoremes de la geometria tridimensional.

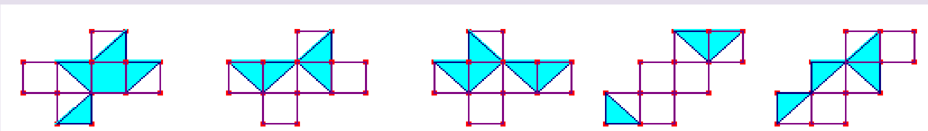
Quina de les figures següents no representa el desenvolupament d'un cub?



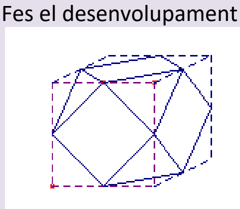
En fer un cub amb el desenvolupament de la figura, quina serà la lletra oposada a F?



A partir d'un d'aquets desenvolupaments bicolors, es pot fabricar un cub, de forma que els colors sigan els mateixos en les dues parts de cadascuna de les arestes. Quin d'ells ho verifica?

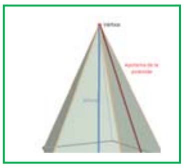


Fes el desenvolupament



Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

RESUM

		Exemples
Teorema de Pitàgores a l'espai	$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 	a= 2, b = 3, c = 4, doncs $D^2 = 4 + 9 + 16 = 29$ D = $\sqrt{29}$ = 5,4.
Teorema de Tales:	Donades dues rectes, *r* i *r'*, que és tallen al punt *O*, i dues rectes paral·leles entre si, *a* i *b*. Si la recta *a* talla als rectes *r* i *r'* als punts *A* i *C*, i la recta *b* talla als rectes *r* i *r'* als punts *B* i *D*, llavors els segments corresponents són proporcionals	
Poliedres regulars	Un poliedre regular és un poliedre en què totes les seues cares són polígons regulars iguals i en el que els seus angles poliedres són iguals. Hi ha cinc poliedres regulars: tetràedre, octàedre, icosàedre, cub i dodecàedre	
Prismes	$A_{Lateral} = Perímetre_{Base} \cdot Altura A_{total} = Àrea_{Lateral} + 2Àrea_{Base}$ $Volum = Àrea_{base} \cdot Altura$	
Piràmides	 $A_{Lateral} = \frac{Perímetre_{Base} \cdot Apotema_{piràmide}}{2} A_{total} = Àrea_{lateral} + Àrea_{Base} Volum = \frac{Àrea_{Base} \cdot Altura}{3}$	
Cilindre	 $A_{Lateral} = 2\pi R H$; $A_{total} = 2\pi R H + 2\pi R^2$ $Volum = Àrea_{Base} \cdot Altura$	
Con	$A_{Lateral} = \pi R G$; $A_{total} = \pi R G + \pi R^2$ $Volum = \frac{Àrea_{base} \cdot Altura}{3}$	
Esfera	$A_{total} = 4\pi R^2$; $Volum = \frac{4}{3}\pi R^3$	
Equacions de la recta al pla	**Equació explícita:** $y = mx + n$. **Equació implícita:** $ax + by + c = 0$ **Equació paramètrica:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \end{cases}$	
Equacions de la recta i el pla a l'espai.	**Equació implícita d'un pla**: $ax + by + cz + d = 0$ **Equació paramètrica d'una recta:** $\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$	

Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

EXERCICIS I PROBLEMES

Teorema de *Pitàgores* i teorema de *Tales*

1. Calcula el volum d'un tetràedre regular de costat 7 *cm*.

2. Calcula la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 1 *m*.

3. Calcula la longitud de la diagonal d'un rectangle de base 15 *cm* i altura 6 *cm*.

4. Dibuixa un paral·lelepípede les arestes del qual mesuren 4 *cm*, 5 *cm* i 6 *cm* que no siga un ortoedre. Dibuixa també el seu desenrotllament.

5. Si el paral·lelepípede anterior fora un ortoedre, quant mesuraria la seua diagonal?

6. Un got d'11 *cm d'altura* té forma de tronc de con en què els radis de les bases són de 5 i 3 *cm*. Quant ha de mesurar com a mínim una cullereta perquè sobreïsca del got almenys 2 *cm*?

7. És possible guardar en una caixa amb forma d'ortoedre d'arestes 4 *cm*, 3 *cm* i 12 *cm* un bolígraf de 13 *cm* de longitud?

8. Calcula la diagonal d'un prisma recte de base quadrada sabent que el costat de la base mesura 6 *cm* i l'altura del prisma 8 *cm*.

9. Si un ascensor medeix 1,2 *m* d'ample, 1,6 *m* de llarg i 2,3 *m* d'altura, és possible introduir en ell una escala de 3 *m* d'altura?

10. Quina és la major distància que es pot mesurar en línia recta en una habitació que té 6 *m* d'ample, 8 *m* de llarg i 4 *m* d'altura?

11. Calcula la longitud de l'aresta d'un cub sabent que la seua diagonal medeix 3,46 *cm*.

12. Calcula la distància màxima entre dos punts d'un tronc de con les bases de la qual tenen radis 5 *cm* i 2 *cm*, i altura 10 *cm*.

13. En una pizzeria la pizza de 15 *cm* de diàmetre val 2 € i la de 40 *cm* val 5 €. Quina té millor preu?

14. Veiem en el mercat un lluç de 30 *cm* que pesa un quilo. Ens pareix un poc xicotet i demanem un altre un poc major, que resulta pesar 2 quilos. Quant mesurarà?

15. En un dia fred un pare i un fill xicotet van exactament igual abrigats, Quin dels dos tindrà més fred?

Longituds, àrees i volums

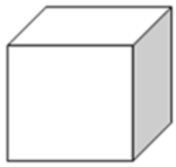
16. Identifica a quin cos geomètric pertanyen els desenrotllaments següents:

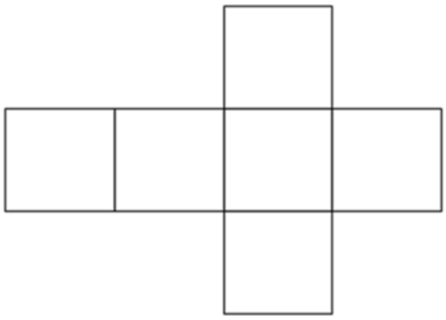
17. Podrà existir un poliedre regular les cares del qual siguen hexagonals? Raona la resposta.

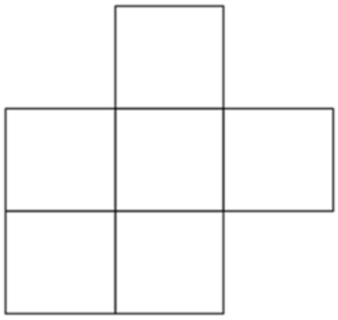
18. Quantes diagonals pots traçar en un cub? I en un octàedre?

19. Pots trobar dues arestes paral·leles en un tetràedre? I en cada un dels restants poliedres regulars?

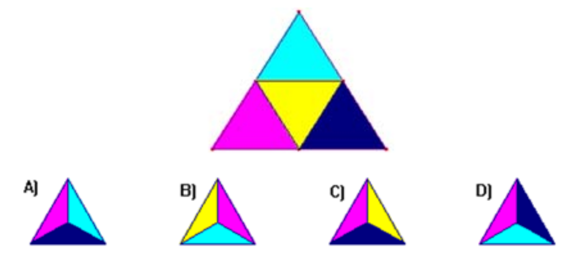
20. Utilitza una trama de quadrats o paper quadriculat, i busca tots els dissenys de sis quadrats que se t'acudisquen. Decideix quins poden servir per a construir un cub.







21. El triangle de la figura s'ha plegat per a obtindre un tetràedre. Tenint en compte que el triangle no està pintat per darrere, quina de les següents vistes en perspectiva del tetràedre és falsa?



22. Un prisma de 8 *dm* d'altura té com a base un triangle rectangle de catets 3 *dm* i 4 *dm*. Calcula les àrees lateral i total del prisma.

23. Dibuixa un prisma hexagonal regular que tinga 3 *cm* d'aresta basal i 0.9 *dm* d'altura i calcula les àrees de la base i total.

24. Un prisma pentagonal regular de 15 *cm* d'altura té una base de 30 cm^2 d'àrea. Calcula el seu volum.

25. Calcula l'àrea total d'un ortoedre de dimensions 2,7 *dm*, 6,2 *dm* i 80 *cm*.

26. Calcula la superfície total i el volum d'un cilindre que té 7 *m* d'altura i 3 *cm* de radi de la base.

27. Calcula l'àrea total d'una esfera de 7 *cm* de radi.

28. Calcula l'apotema d'una piràmide regular sabent que la seua àrea lateral és de 150 cm^2 i la seua base és un hexàgon de 4 *cm* de costat.

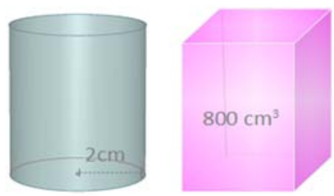
29. Calcula l'apotema d'una piràmide hexagonal regular sabent que el perímetre de la base és de 36 *dm* i l'altura de la piràmide és de 6 *dm*. Calcula també l'àrea total i el volum d'aquesta piràmide.

30. Un triangle rectangle de catets 12 *cm* i 16 *cm* gira al voltant del seu catet menor generant un con. Calcula l'àrea lateral, l'àrea total i el volum.

31. Tres boles de metall de radis 15 *dm*, 0,4 m i 2 *m* es fonen en una sola, Quin serà el diàmetre de l'esfera resultant?

32. Quina és la capacitat d'un pou cilíndric de 1,50 *m* de diàmetre i 30 *m* de profunditat?

33. Quant cartó necessitem per a construir una piràmide quadrangular regular si volem que el costat de la base mesure 12 *cm* i que la seua altura siga de 15 *cm*?



34. Calcula el volum d'un cilindre que té 2 *cm* de radi de la base i la mateixa altura que un prisma la base del qual és un quadrat de 4 *cm* de costat i 800 cm^3 de volum.

35. Quina és l'àrea de la base d'un cilindre de 1,50 *m* d'alt i 135 dm^3 de volum?

36. L'aigua d'un brollador es condueix fins a uns dipòsits cilíndrics que mesuren 10 *m* de radi de la base i 20 *m* d'altura. Després s'embotella en bidons de 2,5 litres. Quants envasos s'omplin amb cada dipòsit?

37. Calcula la quantitat de cartolina necessària per a construir un anell de 10 tetraedres cada un dels quals té un centímetre d'aresta.

38. En fer el desenrotllament d'un prisma triangular regular de 5 *dm* d'altura, va resultar un rectangle d'un metre de diagonal com a superfície lateral. Calcula l'àrea total.

39. Determina la superfície mínima de paper necessària per a embolicar un prisma hexagonal regular de 2 *cm* de costat de la base i 5 *cm* d'altura.

40. L'ajuntament de Madrid ha col·locat unes jardineres de pedra als seus carrers que tenen forma de prisma hexagonal regular. La cavitat interior, on es diposita la terra, té 80 *cm* de profunditat i el costat de l'hexàgon interior és de 60 *cm*. Calcula el volum de terra que ompliria una jardinera per complet.

41. Una habitació té forma d'ortoedre i les seues dimensions són directament proporcionals als nombres 2, 4 i 8. Calcula l'àrea total i el volum si a més se sap que la diagonal mesura 17,3 *m*.

42. Un ortoedre té 0,7 *dm* d'altura i 8 dm^2 d'àrea total. La seua longitud és el doble de la seua amplària, quin és el seu volum?

43. Si el volum d'un cilindre de 15 *cm* d'altura és de 424 cm^3, calcula el radi de la base del cilindre.

44. **(CDI Madrid 2011**) Han instal·lat a casa de Joan un dipòsit d'aigua de forma cilíndrica. El diàmetre de la base mesura 2 metres i l'altura és de 3 metres. a) Calcula el volum del dipòsit en m^3. b) Quants litres d'aigua caben al dipòsit?

45. (**CDI Madrid 2012**) Un envàs d'un litre de llet té forma de prisma, la base és un quadrat que té 10 *cm* de costat. a) Quin és, en cm^3, el volum de l'envàs? b) Calcula l'altura de l'envàs en cm.

46. Una circumferència de longitud 18,84 *cm* gira al voltant d'un dels seus diàmetres generant una esfera. Calcula el seu volum.

47. Una porta mesura 1,8 *m* d'alt, 70 *cm* d'ample i 3 *cm* de grossària. El preu d'instal·lació és de 100 € i es cobra 5 € per m^2 en concepte d'envernissat, a més del cost de la fusta, que és de 280 € cada m^3. Calcula el cost de la porta si només es realitza l'envernissat de les dues cares principals.

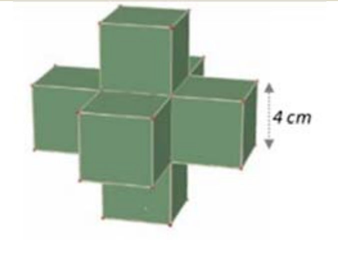
48. L'aigua continguda en un recipient cònic de 21 *cm* d'altura i 15 *cm* de diàmetre de la base s'aboca en un got cilíndric de 15 *cm* de diàmetre de la base. Fins a quina altura arribarà l'aigua?

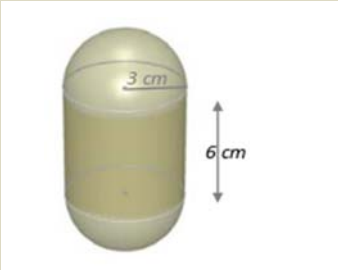
49. Segons Arquimedes, quines dimensions té el cilindre circumscrit a una esfera de 7 *cm* de radi que té la seua mateixa àrea? Calcula aquesta àrea.

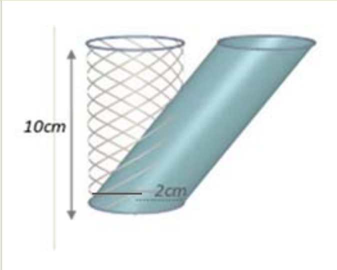
Autores: Milagros Latasa Asso i Fernanda Ramos Rodríguez
Traducció: Pedro Podadera, IES Juan de Garay

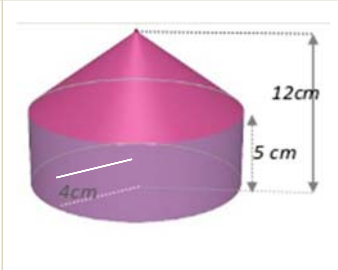
50. Quin és el volum d'una esfera en què la longitud d'una circumferència màxima és 251,2 *m*?

51. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics:

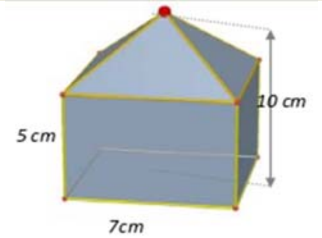




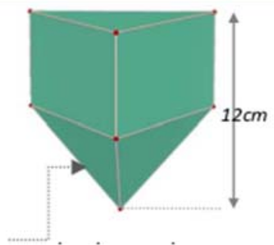




52. Calcula l'àrea lateral i el volum dels següents cossos geomètrics



La base és quadrada



Tetràedre de 5cm d'aresta

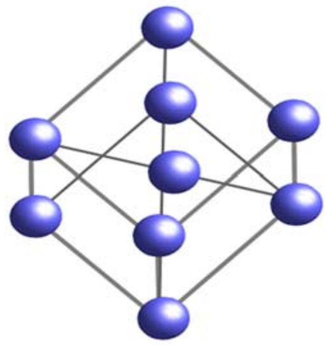
Octàedre de 6cm d'aresta

Piràmides construïdes a l'interior d'una estructura cúbica de 5 dm d'aresta.

53. A la construcció d'un globus aerostàtic esfèric d'un metre de radi s'empra lona que té un cost de 300 €/m^2. Calcula l'import de la lona necessària per a la seua construcció.

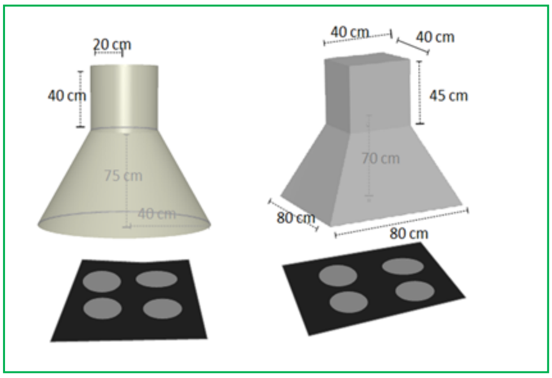
54. Calcula el radi d'una esfera que té 33,51 dm^3 de volum.

55. L'Atomium és un monument de Brussel·les que reprodueix una molècula de ferro. Consta de 9 esferes d'acer de 18 m de diàmetre que ocupen els vèrtexs i el centre d'una estructura cúbica de 103 m de diagonal, realitzada amb cilindres de 2 metres de diàmetre. Si utilitzem una escala 1:100 i tant les esferes com els cilindres són massissos, quina quantitat de material necessitarem?



56. S'ha pintat per dins i per fora un dipòsit sense tapadora de 8 dm d'alt i 3 dm de radi. Tenint en compte que la base només es pot pintar per dins, i que s'ha utilitzat pintura de 2€/dm^2, quants diners ha costat en total?

57. Una piscina mesura 20 m de llarg, 5 m d'ample i 2 m d'alt.



Quants litres d'aigua són necessaris per a omplir-la?

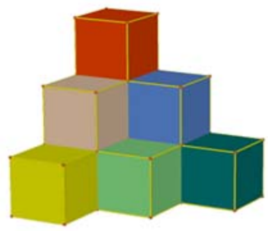
Quant costarà recobrir el sòl i les parets amb PVC si el preu és de 20 €/ m^2?

58. Quina de les dues campanes extractores de la figura esquerra té un cost d'acer inoxidable menor?

59. En un atuell cilíndric de 3 *m* de diàmetre i que conté aigua, s'introdueix una bola. Quin és el seu volum si després de la immersió puja 0,5 *m* el nivell de l'aigua?

60. El preu de les teules és de 12,6 €/m^2 Quant costarà reparar una vivenda la teulada de la qual té forma de piràmide quadrangular regular de 1,5 *m* d'altura i 15 m de costat de la base?

61. S'enrotlla una cartolina rectangular de costats 40 *cm* i 26 *cm* formant cilindres de les dues formes possibles, fent coincidir costats oposats. Quin dels dos cilindres resultants té major volum?



62. Cada un dels cubs de la figura té 2 *cm* d'aresta. Quants cal afegir per a formar un cub de 216 cm^3 de volum?

63. Un tub d'assaig té forma de cilindre obert a la part superior i rematat per una semiesfera a la inferior. Si el radi de la base és d'1 *cm* i l'altura total és de 12 *cm*, calcula quants centilitres de líquid caben en ell.

64. El costat de la base de la piràmide de Keops mesura 230 *m*, i la seua altura 146 *m*. Quin volum tanca?

65. La densitat d'un tap de suro és de 0,24, quant pesen mil taps si els diàmetres de les seues base mesuren 2,5 *cm* i 1,2 *cm*, i la seua altura 3 *cm*?

66. Comprova que el volum d'una esfera és igual al del seu cilindre circumscrit menys el del con de la mateixa base i altura.

67. Calcula el volum d'un octaedre regular d'aresta 2 *cm*.

68. Construeix en cartolina un prisma quadrangular regular de volum 240 cm^3, i d'àrea lateral 240 cm^2.

69. El vidre d'un fanal té forma de tronc de con de 40 *cm* d'altura i bases de radis 20 i 10 *cm*. Calcula la seua superfície.

70. Un bot cilíndric de 15 *cm* de radi i 30 *cm* d'altura té al seu interior quatre pilotes de radi 3,5 *cm*. Calcula l'espai lliure que hi ha al seu interior.

71. Un embut cònic de 15 *cm* de diàmetre té un litre de capacitat, quina és la seua altura?

72. En un dipòsit amb forma de cilindre de 30 *dm* de radi, una aixeta aboca 15 litres d'aigua cada minut. Quant augmentarà l'altura de l'aigua després de mitja hora?

73. La lona d'una ombrel·la oberta té forma de piràmide octogonal regular de 0,5 *m* d'altura i 40 *cm* de costat de la base. Es fixa un pal al sòl en què s'encaixa i el vèrtex de la piràmide queda a una distància del sòl de 1,80 *m*. En el moment en què els rajos de sol són verticals, quina àrea té l'espai d'ombra que determina?

74. Una peixera amb forma de prisma recte i base rectangular s'ompli amb 65 litres d'aigua. Si té 65 *cm* de llarg i 20 *cm* d'ample, quina és la seua profunditat?

75. En un gelat de cucurutxo la galeta té 12 *cm* d'altura i 4 *cm* diàmetre. Quina és la seua superfície? Si el cucurutxo està completament ple de gelat i sobreïx una semiesfera perfecta, quants cm^3 de gelat conté?

Iniciació a la Geometria Analítica

76. Calcula la distància entre els punts *A*(7, 3) i *B*(2, 5).

77. Calcula la distància entre els punts *A*(7, 3, 4) i *B*(2, 5, 8).

78. Calcula la longitud del vector de components ***u*** = (4, 5).

79. Calcula la longitud del vector de components ***u*** = (4, 5, 0).

80. El vector ***u*** = (4, 5) té l'origen al punt *A*(3, 7). Quines són les coordenades del seu punt extrem?

81. El vector ***u*** = (4, 5, 2) té l'origen al punt *A*(3, 7, 5). Quines són les coordenades del seu punt extrem?

82. Dibuixa un quadrat de diagonal el punt *A*(2, 3) i *C*(5, 6). Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del quadrat? Calcula la longitud del costat i de la diagonal del dit quadrat.

83. Dibuixa un cub de diagonal *A*(1, 1, 1) i *B*(4, 4, 4). Quines coordenades tenen els altres vèrtexs del cub? Ja saps, són 8 vèrtexs. Calcula la longitud de l'aresta, de la diagonal d'una cara i de la diagonal del cub.

84. Siga *X*(*x*, *y*) un punt del pla, i *A*(2, 4), escriu l'expressió de tots els punts *X* que disten de *A* una distància 3.

85. Siga *X*(*x*, *y*, *z*) un punt a l'espai, i *A*(2, 4, 3), escriu l'expressió de tots els punts *X* que disten de *A* una distància 3.

86. Escriu l'equació paramètrica de la recta que passa pel punt *A*(2, 7) i té com a vector de direcció ***u***=(4,5). Representa-la gràficament.

87. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts *A*(2, 7) i *B*(4, 6), de forma explícita, implícita i paramètrica. Representa-la gràficament.

88. Escriu l'equació de la recta que passa pels punts *A*(2, 4, 6) i *B*(5, 2, 8), de forma explícita, i com a intersecció de dos plans.

89. Al cub de diagonal *A*(1, 1, 1) i *B*(5, 5, 5) escriu les equacions dels plans que formen les seues cares. Escriu també les equacions de totes les seues arestes, i les coordenades dels seus vèrtexs.

90. Escriu l'equació del cilindre d'eix $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ i radi 3.

91. Escriu l'equació de l'esfera de centre *A*(2, 7, 3) i radi 4.

92. Escriu l'equació del cilindre d'eix, la recta $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ i radi 2.

93. Escriu l'equació de la circumferència al pla de centre *A*(3, 7) i radi 3.

94. En tallar a un cert cilindre per un pla horitzontal es té la circumferència de l'exercici anterior. Escriu l'equació del cilindre.

AUTOAVALUACIÓ

1. Les longituds dels costats del triangle de vèrtexs $A(2, 2)$ $B(1, 4)$ i $C(0, 3)$ són:

a) 2, 5, 5 b) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

2. Al triangle rectangle de catets 3 i 4 *cm* es multipliquen per 10 totes les seues longituds. L'àrea del nou triangle és:

a) 6 m^2 b) 6 dm^2 c) 60 cm^2 d) 0,6 m^2

3. L'altura d'un prisma de base quadrada és 20 *cm* i el costat de la base és 5 *cm*, la seua àrea total és:

a) 450 cm^2 b) 45 dm^2 c) 425 cm^2 d) 0,45 m^2

4. Un dipòsit d'aigua té forma de prisma hexagonal regular de 5 *m* d'altura i costat de la base 1 *m*. El volum d'aigua que hi ha en ell és:

a) $60\sqrt{2}$ m^3 b) $45\sqrt{2}$ m^3 c) $30000\sqrt{2}$ dm^3 d) $90\sqrt{2}$ m^3

5. La teulada d'una caseta té forma de piràmide quadrangular regular de 0,5 *m* d'altura i 1000 *cm* de costat de la base. Si es necessiten 15 teules per metre quadrat per a recobrir la teulada, s'utilitzen un total de:

a) 1051 teules. b) 150 teules. c) 245 teules. d) 105 teules.

6. Una caixa de dimensions 30, 20 i 15 *cm*, està plena de cubs d'1 *cm* d'aresta. Si s'utilitzen tots per a construir un prisma recte de base quadrada de 10 *cm* de costat, l'altura mesurarà:

a) 55 *cm* b) 65 *cm* c) 75 *cm* d) 90 *cm*

7. El radi d'una esfera que té el mateix volum que un con de 5 *dm* de radi de la base i 120 *cm* d'altura és:

a) $5\sqrt{3}$ *dm* b) $\sqrt[3]{75}$ *dm* c) 150 *cm* d) $\sqrt[3]{2250}$ *cm*

8. Es distribueixen 42,39 litres de dissolvent en llandes cilíndriques de 15 *cm* d'altura i 3 *cm* de radi de la base. El nombre d'envasos necessari és:

a) 100 b) 10 c) 42 d) 45

9. L'equació d'una recta al pla que passa pels punts $A(2, 5)$ i $B(1, 3)$ és:

a) $y = -2x + 1$ b) $3y - 2x = 1$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = -2x + 9$.

10. L'equació de l'esfera de centre A(2, 3, 5) i radi 3 és:

a) $x^2 - 2x + y^2 - 3y + z^2 - 5z + 29 = 0$ b) $x^2 - 4x + 3y^2 - 6y + 5z^2 - 10z + 29 = 0$

c) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 38 = 0$ d) $x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 - 10z + 29 = 0$