Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4tB ESO
Capítol 4: Equacions i sistemes

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Raquel Hernández

Revisora: María Molero

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

Resum

Els matemàtics han tardat prop de tres mil anys a comprendre i resoldre equacions tan senzilles i que tu coneixes tan bé com $ax + b = 0$. Ja els egipcis resolien problemes que es poden considerar d'equacions encara que no existia la notació algebraica. El matemàtic grec *Diofanto* al segle III va resoldre equacions de primer i segon grau. Al segle XV va haver-hi un desafiament per a premiar a qui resolguera una equació de tercer grau. Al segle XIX es va demostrar que no hi ha una fórmula general que resolga les equacions de cinqué grau. Per a imposar que l'equació $ax + b = 0$ tinga sempre solució, el conjunt numèric dels nombres naturals ha d'ampliar-se amb els nombres negatius. Per a imposar que l'equació $ax = b$ tinga sempre solució, el conjunt numèric dels nombres enters ha d'ampliar-se amb els nombres fraccionaris. Per a imposar que l'equació $x^2 = a$, $a > 0$, recorda $x^2 = 2$, tinga solució, el conjunt numèric ha d'ampliar-se amb els nombres irracionals. Però l'equació $x^2 + 1 = 0$, encara no té solució en el conjunt numèric dels nombres reals. El pròxim curs s'ampliarà el domini als nombres complexos.

En aquest capítol repassarem la solució d'equacions de segon grau i sistemes lineals, que ja coneixes, i ampliarem amb equacions i sistemes nous.

1. EQUACIONS DE SEGON GRAU

1.1. Concepte d'equacions de segon grau

Recorda que:

Una **equació de segon grau** és una equació polinómica en la que la major potència de la incògnita és 2. Les equacions de segon grau es poden escriure de la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on *a, b i c* són nombres reals, amb $a \neq 0$.

Exemple:

a) *Són equacions de 2n grau:*

$2x^2 - 7x + 4 = 0$; $-9x^2 + 2x - 5 = 0$; $6x^2 - (1/2)x - 3,25 = 0$

b) *Els coeficients de les equacions de* 2n grau són nombres reals, per tant poden ser fraccions o arrels. Per exemple:

$\frac{9}{2}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{2}{5} = 0$; $\frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{4}{9} = 0$; $-5,8x^2 + 1,7x - 7,02 = 0$; $\sqrt{5}x^2 + \frac{3}{2}x - \sqrt[3]{2} = 0$.

Activitats proposades

1. Indica si són equacions de segon grau les equacions següents:

a) $3x^2 - \sqrt{7}x + 5 = 0$ b) $4,7x^2 - 6,25 = 0$ c) $7x^2 - \frac{2}{x} + 5x = 0$

d) $2xy^2 - 5 = 0$ e) $33 - 2,35x = 0$ f) $9x^2 - 52\sqrt{x} + 3'2 = 0$

2. A les següents equacions de segon grau, indica qui són *a*, *b* i *c*.

a) $3 - 8x^2 + 10x = 0$ b) $-3,4x^2 + 7,8x = 0$

c) $6x^2 - 1 = 0$ d) $1,25x^2 - 3,47x + 2,75 = 0$.

1.2. Resolució d'equacions de 2n grau completes

Recorda que:

S'anomena equació **de segon grau completa** a aquella que té valors diferents de zero para *a*, *b* i *c*.

Per a resoldre les equacions de segon grau completes s'utilitza la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aquesta fórmula ens permet calcular les dues solucions de l'equació.

Anomenem **discriminant** a la part de la fórmula que està a l'interior de l'arrel:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Activitats resoltes

- *Resol l'equació de segon grau* $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Primer hem de saber qui són *a*, *b* i *c:*

$$a = 1;\ b = -3;\ c = 2.$$

Substituint aquests valors en la fórmula, obtenim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Per tant, les dues solucions són: $x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$; $x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$.

En efecte, $2^2 - 3·2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, i $1^2 - 3·1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$, per tant 2 i 1 són solucions de l'equació.

Activitats proposades

3. Resol les següents equacions de 2n grau completes:

a) $x^2 - 8x + 7 = 0$ b) $2x^2 + 3x - 12 = 0$

c) $10x^2 - 9x + 50 = 0$ d) $x^2 - 13x + 22 = 0$

4. Resol les equacions següents:

a) $2x - 3 \cdot \frac{x-1}{5} = 6x^2 - \frac{8x+7}{5}$; b) $2 \cdot \frac{x-7}{5} - \frac{3-2x}{x} = 10$; c) $5x·(x - 3) + 4(x^2 - 5) + 10 = -10$;

d) $5(x^2 - 1) + 3(x^2 - 5) + 4 = 7$; e) $\frac{2-5x^2}{3x} - \frac{5}{3} = \frac{4x-7}{6}$; f) $\frac{2-3x^2}{5x} - \frac{4}{3} = \frac{2x-1}{15}$.

1.3. Nombre de solucions d'una equació de 2n grau completa

Recorda que:

Abans hem definit el que era el **discriminant**, et recordes?

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Per a saber quantes solucions té una equació de 2n grau, ens anem a fixar al signe del discriminant.

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'equació té **dues solucions reals i distintes**.

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, l'equació té dues solucions reals iguals, (una solució **doble**).

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ l'equació **no té solució.**

El motiu és molt senzill, l'arrel quadrada d'un nombre real negatiu no és un nombre real, no existeix.

Exemple:

- *L'equació* $x^2 - 7x + 10 = 0$ *té com a discriminant*:

$$b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4\cdot1\cdot10 = 49 - 40 = 9 > 0$$

Per tant, l'equació donada té 2 solucions reals i distintes, 2 i 5. (Comprovació*:* $5^2 - 7\cdot5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$ i $(2)^2 - 7(2) + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$).

- *L'equació* $x^2 - 6x + 9 = 0$ *té com a discriminant*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4\cdot1\cdot9 = 36 - 36 = 0$$

Per tant, l'equació té dues solucions reals iguals. Es pot escriure com:

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0$, que té la solució doble $x = 3$.

- L'equació $x^2 + 4x + 10 = 0$ *té com a discriminant*:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4\cdot1\cdot(10) = 16 - 40 = -24 < 0$$

Per tant, l'equació no té solució real. Cap nombre real verifica l'equació.

Activitats proposades

5. Esbrina quantes solucions tenen les següents equacions de 2n grau:

a) $9x^2 + 4x + 7 = 0$ **b)** $3x^2 - 5x + 2 = 0$

c) $x^2 - 9x - 12 = 0$ **d)** $2x^2 - 7x + 9 = 0$.

1.4. Resolució d'equacions de 2n grau incompletes

Recorda que:

Anomenem **equació de 2n grau incompleta** a aquella equació de segon grau en què el coeficient b val 0 (falta b), o el coeficient c val 0 (falta c).

Observa: Si el coeficient a val zero no és una equació de segon grau.

Exemple:

- *L'equació de segon grau* $3x^2 - 22 = 0$ és incompleta perquè el coeficient $b = 0$, és a dir, falta b.
- *L'equació de segon grau* $2x^2 - 7x = 0$ és incompleta perquè no té c, és a dir, $c = 0$.

Una equació de segon grau incompleta també es pot resoldre utilitzant la fórmula de les completes però és un procés més lent i és més fàcil enganyar-se.

Si el **coeficient b = 0:** Aïllem la incògnita normalment, com féiem en les equacions de primer grau:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Si $\frac{-c}{a} > 0$ té dues solucions distintes, si $\frac{-c}{a} < 0$ no hi ha solució.

Si el coeficient ***c* = 0:** Traiem factor comú:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x\cdot(ax + b) = 0.$$

Perquè el producte de dos factors valga zero, un dels factors ha de valdre zero.

Per tant $x = 0$, o $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$.

Resum

Si el **coeficient *b* = 0,** $ax^2 + c = 0$, aïllem la incògnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

Si el **coeficient *c* = 0,** $ax^2 + bx = 0$, traiem factor comú: $x = 0$ i $x = \frac{-b}{a}$.

Exemple:

- *En l'equació* $2x^2 - 200 = 0$ *falta la b*.

Per a resoldre-la aïllem la incògnita, és a dir, x^2:

$$2x^2 - 200 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 200 \Rightarrow x^2 = 200/2 = 100$$

Una vegada que arribem ací, ens falta llevar aqueix quadrat que porta nostra incògnita. Per a això, fem l'arrel quadrada als 2 membres de l'equació:

$$\boldsymbol{x = \pm\sqrt{100} = \pm 10}.$$

Així hem obtingut les dues solucions de la nostra equació, 10 i –10.

En efecte, $2\cdot 10^2 - 200 = 2\cdot 100 - 200 = 0$, i $2\cdot(-10)^2 - 200 = 2\cdot 100 - 200 = 0$.

Exemple:

- *En l'equació* $3x^2 - 21x = 0$ *falta la c*.

Per a resoldre-la, traiem factor comú:

$$3x^2 - 21x = 0 \Rightarrow 3x\cdot(x - 21) = 0$$

Una vegada que arribem ací, tenim dues opcions

1) $3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

2) $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$.

Així hem obtingut les dues solucions de l'equació $x = 0$ i $x = 7$.

En efecte, $3\cdot 0^2 - 21\cdot 0 = 0$, i $3\cdot(7)^2 - 21\cdot 7 = 3\cdot 49 - 21\cdot 7 = 147 - 147 = 0$.

Activitats resoltes

- *Resol l'equació de segon grau* $2x^2 - 50 = 0$:

Solució: Es tracta d'una equació de 2n grau incompleta on falta la *b*. Per tant, aïllem la incògnita:

$$2x^2 - 50 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 50/2 = 25 \Rightarrow \text{Les solucions són 5 i } -5.$$

- *Resol l'equació de segon grau* $x^2 + 11x = 0$:

Solució: Es tracta d'una equació de 2n grau incompleta on falta la *c*.

Per tant, traiem factor comú: $x^2 + 11x = 0 \Rightarrow x(x + 11) = 0$.

Obtenim les dues solucions: $x = 0$ i $x + 11 = 0 \Rightarrow x = -11$.

Les solucions són 0 i –11.

Activitats proposades

6. Resol les següents equacions de 2n grau incompletes:

a) $5x^2 + 75x = 0$ b) $4x^2 - 160 = 0$

c) $x^2 - 64 = 0$ d) $3x^2 + 2x = 0$

e) $9x^2 - 49 = 0$ f) $3x^2 - 33x = 0$.

7. Resol les següents equacions de 2n grau incompletes:

a) $3x^2 + 18x = 0$ b) $5x^2 - 180 = 0$

c) $x^2 - 49 = 0$ d) $2x^2 + x = 0$

e) $4x^2 - 25 = 0$ f) $5x^2 - 10x = 0$.

1.5. Suma i producte de les solucions en una equació de segon grau

Recorda que:

Si en una equació de segon grau: $x^2 + bx + c = 0$, amb $a = 1$, coneixem les seues solucions: x_1 i x_2 sabem que podem escriure l'equació de forma factorizada:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Fem operacions:

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0,$$

per tant el coeficient *c* és igual al producte de les solucions i la suma de les solucions és igual a l'oposat del coeficient *b*, és a dir, –*b*.

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = c;\ x_1 + x_2 = -b.}$$

Si l'equació és $ax^2 + bx + c = 0$, dividint per a, ja tenim una de coeficient $a = 1$, i obtenim que:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a};\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Aquesta propietat ens permet, de vegades, resoldre mentalment algunes equacions de segon grau.

Activitats resoltes

- *Resol mentalment l'equació* $x^2 + x - 2 = 0$.

Les solucions són 1 i –2, perquè el seu producte és –2 i la seua suma –1.

- *Resol mentalment l'equació* $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Busquem, mentalment dos nombres el producte del qual siga 6 i la suma dels quals siga 5. En efecte, $2 \cdot 3 = 6$, i $2 + 3 = 5$, per tant les solucions de l'equació són 2 i 3.

- *Resol mentalment l'equació* $x^2 - 8x + 16 = 0$.

El producte ha de ser 16. Provem amb 4 com a solució, i en efecte $4 + 4 = 8$. Les solucions són l'arrel 4 doble.

- *Resol mentalment l'equació* $x^2 + x - 2 = 0$.

Les solucions són –2 i 1, perquè el seu producte és –2 i la seua suma –1.

Activitats proposades

8. Resol mentalment les següents equacions de 2n grau:

a) $2x^2 + 8x = 0$ b) $x^2 + 6x - 27 = 0$

c) $x^2 - 81 = 0$ d) $x^2 - 10x + 22 = 0$

e) $x^2 - 3x - 4 = 0$ f) $x^2 - 5x - 24 = 0$

9. Escriu una equació de segon grau les solucions de la qual siguen 5 i 9.

10. El perímetre d'un rectangle mesura 20 cm i la seua àrea 24 cm². Calcula mentalment les seues dimensions.

11. Si 3 és una solució de $x^2 - 7x + a = 0$, quant val a?

2. ALTRES TIPUS D'EQUACIONS

Durant segles els algebristes han buscat fórmules, com la que ja coneixes de l'equació de segon grau, que resolguera les equacions de tercer grau, de quart, de cinqué… sense èxit a partir del cinqué grau. Les fórmules per a resoldre les equacions de tercer i quart grau són complicades. Només sabem resoldre de forma senzilla algunes d'aquestes equacions.

Exemple:

- Resol: $(x - 5) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2) \cdot (x - 9) \cdot (x - 6) = 0$.

És una equació **polinómica** de grau cinc, però en estar factorizada sabem resoldre-la ja que perquè el producte de diversos factors siga zero, un d'ells ha de valdre zero. Igualant a zero cada factor tenim que les solucions són 5, 3, –2, 9 i 6.

2.1. Equacions biquadrades

Una **equació biquadrada** és una equació de la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

Per a resoldre-la, fem el canvi $x^n = t$, convertint-la així en una equació de segon grau de fàcil resolució.

Quan hàgem calculat el valor de t, desfem el canvi efectuat, $x = \sqrt[n]{t}$ per a obtindre la solució x.

Les equacions biquadrades més comuns són les de quart grau

Exemple:

- *Per a resoldre l'equació biquadrada* $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$, fem el canvi obtenint l'equació de segon grau $t^2 - 10t + 9 = 0$.

Resolem la dita equació de segon grau:

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$t_1 = \frac{10 + 8}{2} = 9 \quad i \quad t_2 = \frac{10 - 8}{2} = 1$$

Desfem el canvi per a obtindre els valors de x:

$$Si\ t_1 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$
$$Si\ t_2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Activitats resoltes

- *L'equació* $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ és una equació polinómica de quart grau, però amb una forma molt especial, és una equació **biquadrada**, perquè podem transformar-la en una equació de segon grau anomenant a x^2 per exemple, t.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Una solució de l'equació de segon grau és $t = 4$, i l'altra és $t=1$.

Per tant si $t = x^2 = 4$, aleshores $x = 2$ i $x = -2$.

I si $t = x^2 = 1$, aleshores $x = 1$ i $x = -1$.

La nostra equació de quart grau té quatre solucions: 2, –2, 1 i –1.

Activitats proposades

12. Resol les equacions següents:

a) $(x - 7) \cdot (x - 2) \cdot (x + 5) \cdot (x - 3) \cdot (x - 11) = 0$ b) $3(x - 5) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) = 0$

13. Resol les següents equacions biquadrades:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ b) $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$ c) $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

14. Resol les equacions biquadrades següents:

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ c) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ d) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

2.2. Equacions racionals

Si hi ha incògnites al denominador, l'equació es denomina **racional**, i es resol de forma semblant, llevant denominadors.

Per a resoldre equacions **racionals**, es multipliquen ambdós membres de l'equació pel mínim comú múltiple dels denominadors.

Exemples:

- *Resol* $\dfrac{3x - 8 + 9x}{2x} = 4$

Llevem denominadors:

$$\frac{3x - 12 + 9x}{2x} = 4 \Rightarrow 3x - 12 + 9x = 8x \Rightarrow 3x + 9x - 8x = 12 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3.$$

- *Per a resoldre l'equació racional* $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{x^2 - 4}$, primer calculem el mínim comú múltiple dels denominadors:

$$\text{m.c.m.}(x - 2, x + 2, x^2 - 4) = (x - 2) \cdot (x + 2).$$

Multipliquem tota l'equació pel mínim comú múltiple, obtenint la nova equació:

$$\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}+\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x+2}=\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x^2-4}\Rightarrow (x+2)+(x-2)=1.$$

Resolem la dita equació i així obtenim el resultat:

$$(x+2)+(x-2)=1 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Activitats proposades

15. Resol les següents equacions racionals:

a) $\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}=0$ b) $\frac{1}{x-6}+\frac{x}{x-2}=\frac{1}{x^2-8x+12}$ c) $\frac{3}{x}=1+\frac{x-13}{6}$.

2.3. Equacions radicals

Si hi ha incògnites dins d'un radical, l'equació es denomina **irracional**, i es resol aïllant el radical i elevant al quadrat (o a l'índex del radical). Ara és necessari tindre una precaució, en elevar al quadrat, l'equació obtinguda no és equivalent, es poden haver afegit solucions. Sempre és convenient comprovar el resultat, però en aquest cas, és necessari.

Una **equació radical o irracional** és aquella que té la incògnita davall del signe de l'arrel.

Per a resoldre equacions radicals, seguim els passos següents:

1.- S'aïlla un radical en un dels dos membres, passant a l'altre membre la resta dels termes, encara que tinguen també radicals.

2.- S'eleven al quadrat els dos membres.

3.- Si queden més radicals, es torna a aïllar un i s'eleva al quadrat, fins que no quede cap.

4.- Es resol l'equació obtinguda.

5.- Es comprova que la solució és vàlida.

Exemple:

- *Resoldrem l'equació radical* $\sqrt{2x-3}+1=x$.

1.- S'aïlla un radical en un dels dos membres, passant a l'altre membre la resta dels termes:

$$\sqrt{2x-3}+1=x \Rightarrow \sqrt{2x-3}=x-1.$$

2.- S'eleven al quadrat els dos membres:

$$\sqrt{2x-3}=x-1 \Rightarrow 2x-3=(x-1)^2 \Rightarrow 2x-3=x^2-2x+1.$$

3.- Es resol l'equació obtinguda:

$$2x-3=x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm0}{2}=2 \text{ doble.}$$

4.- Es comprova que la solució és vàlida:

$$\sqrt{2\cdot 2-3}+1=2 \Rightarrow \sqrt{1}+1=2 \Rightarrow 2=2.$$

Activitats resoltes

- *Resol l'equació radical* $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=2$.

1.- S'aïlla un radical en un dels dos membres, passant a l'altre membre la resta dels termes, encara que tinguen també radicals:

$$\sqrt{x+6}=2+\sqrt{x-2}.$$

2.- S'eleven al quadrat els dos membres:

$$\left(\sqrt{x+6}\right)^2=\left(2+\sqrt{x-2}\right)^2 \Rightarrow x+6=4+4\sqrt{x-2}+x-2.$$

Simplifiquem l'equació obtinguda:

$$x+6=4+4\sqrt{x-2}+x-2 \Rightarrow x+6-4-x+2=4\sqrt{x-2} \Rightarrow 4=4\sqrt{x-2}.$$

3.- Tornem ara al pas 2 per a eliminar l'arrel que tenim encara:

$$4=4\sqrt{x-2} \Rightarrow 4^2=\left(4\sqrt{x-2}\right)^2 \Rightarrow 16=16(x-2).$$

4.- Es resol l'equació obtinguda:

$$16=16(x-2) \Rightarrow 1=x-2 \Rightarrow x=3.$$

5.- Es comprova que la solució és vàlida:

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}=2 \Rightarrow \sqrt{3+6}-\sqrt{3-2}=2 \Rightarrow \sqrt{9}-\sqrt{1}=2 \Rightarrow 3-1=2 \Rightarrow 2=2.$$

La solució $x = 3$ verifica l'equació.

Activitats proposades

16. Resol les següents equacions irracionals:

a) $\sqrt{5x+4}-1=2x$ b) $\sqrt{x+19}+1=\sqrt{2x+4}$ c) $3\sqrt{x-1}+11=2x$.

2.4. Altres equacions

Hi ha també equacions trigonomètriques, logarítmiques, exponencials. Així, si la incògnita està en un exponent l'equació es denomina **exponencial**. Si podem expressar els dos membres de l'equació com a potències de la mateixa base, s'igualen els exponents.

Exemple:

- Resol: $2^{2x} = \frac{1}{16}$

Expressem l'equació com a potències d'una mateixa base: $2^{2x} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-4}$

Igualem els exponents: $2x = -4 \Rightarrow x = -2$.

Activitats proposades

17. Resol les equacions següents:

a) $(x-9)\cdot(x-1)\cdot(x+24)\cdot(x-5)\cdot(x-3)=0$ b) $3(x-5)\cdot(x-9)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-4)=0$

18. Resol les equacions biquadrades següents:

a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ b) $x^4 - 21x^2 + 12100 = 0$ c) $x^4 - 45x^2 + 234 = 0$ d) $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$

19. Resol les equacions racionals següents:

a) $\frac{2x-1+7x}{3x} = \frac{3}{x} - 2$ b) $\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3}$ d) $\frac{2x-3}{x} + \frac{1}{x} = 1$

20. Resol les equacions irracionals següents:

a) $5+\sqrt{x-1}=x+2$ b) $\sqrt{x-2}+3\sqrt{x-2}=x+1$ c) $\sqrt{x}-4=x-1$ d) $7+\sqrt{x+4}=x+9$

21. Resol les equacions exponencials següents:

a) $5^{3x} = \frac{1}{625}$ b) $2^{2x}\cdot 4^{x} = \frac{1}{16}$ c) $2^{x+5} + 2^{x+4} + 2^{x+3} = 28$

3. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

3.1. Concepte de sistema d'equacions lineals

Recorda que:

Una **equació** amb diverses incògnites és una igualtat que les relaciona.

Per exemple:

$x^2 + y^2 = 25$, és l'equació d'una circumferència de centre l'origen i radi 5.

Un **sistema d'equacions** és un conjunt d'equacions amb diverses incògnites.

Per exemple:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 7x + 2y = 0 \end{cases}$$

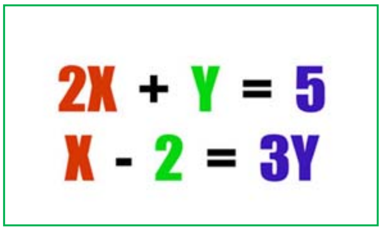
La primera equació és la d'una circumferència de centre l'origen i radi 5, i la segona és l'equació d'una recta que passa per l'origen. Les solucions del sistema són els punts d'intersecció entre la circumferència i la recta.

S'anomena **solució del sistema** a cada un dels conjunts de nombres que verifiquen totes les equacions del sistema.

Dos sistemes són **equivalents** quan tenen les mateixes solucions.

Un **sistema d'equacions lineals** amb dues incògnites es pot expressar de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$



on *a*, *b*, *a'* i *b'* són nombres reals que es denominen **coeficients** i *c* i *c*' també són nombres reals anomenats **termes independents**.

Anomenem **solució** del sistema al parell de valors (*x*, y) que satisfan les dues equacions del sistema.

Es diu que dos sistemes d'equacions són **equivalents**, quan tenen la mateixa solució.

Exemple:

- *Són sistemes d'equacions lineals, per exemple:*

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 \\ 2x + 5y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 7x - 3y = 4 \end{cases}$$

Exemple:

- ***No** és un sistema lineal* $\begin{cases} 9xy + 2y = 5 \\ 3x - xy = 4 \end{cases}$ perquè té termes en *xy*, encara que és un sistema de dues equacions.

Tampoc ho és $\begin{cases} 5x^2 + 9y = 2 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases}$ perquè té un terme en x^2, encara que també és un sistema de dues equacions.

Activitats proposades

22. Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els sistemes següents:

a) $\begin{cases} 7xy + 5y = 2 \\ 3x - 5y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y - 4x = 3 \\ 3x - 5y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 4 = 2y \\ 6x + 8y = 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2 + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

3.2. Classificació de sistemes d'equacions

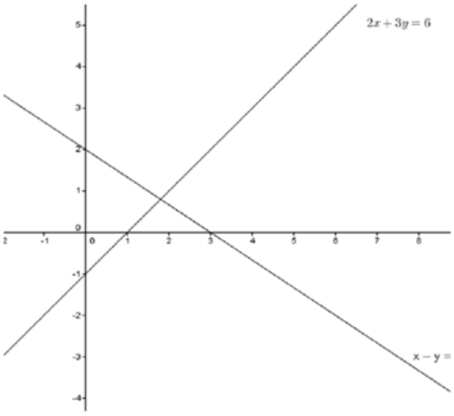
Recorda que:

En un sistema d'equacions lineals amb dues incògnites, cada una de les equacions representa una recta al pla. Aquestes rectes poden estar posicionades entre si de tres maneres distintes, la qual cosa ens ajudarà a classificar el nostre sistema en:

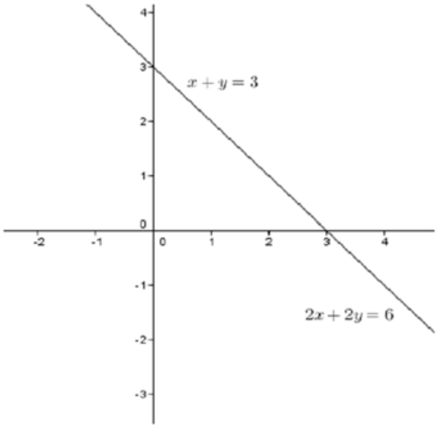
1) **Compatible determinat**: el sistema té una única solució, per la qual cosa nostres rectes són **SECANTS**

2) **Compatible indeterminat**: el sistema té infinites solucions, per la qual cosa les rectes són **COINCIDENTS**

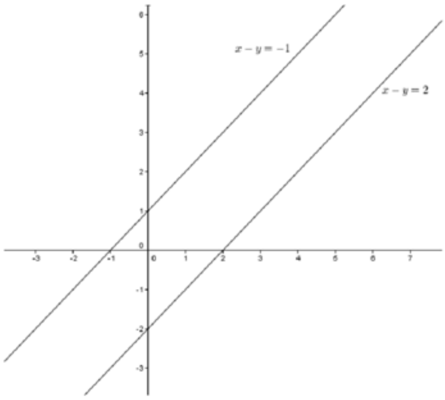
3) **Incompatible**: el sistema no té solució, per la qual cosa les rectes són **PARAL·LELES.**



Compatible determinat



Compatible indeterminat



Incompatible

Activitats resoltes

- *Afig una equació a* $x - 2y = 2$ perquè el sistema resultant siga:

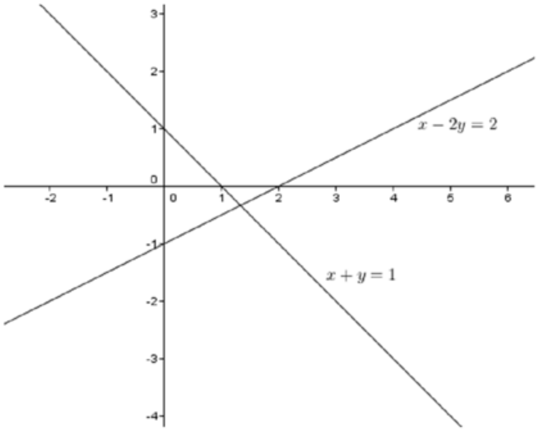
  a) Compatible determinat.

  b) Incompatible.

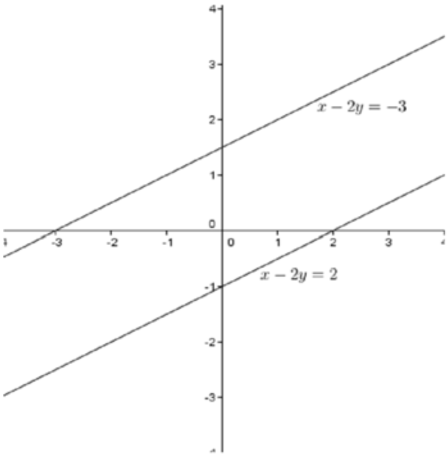
  c) Compatible indeterminat.

Solució:

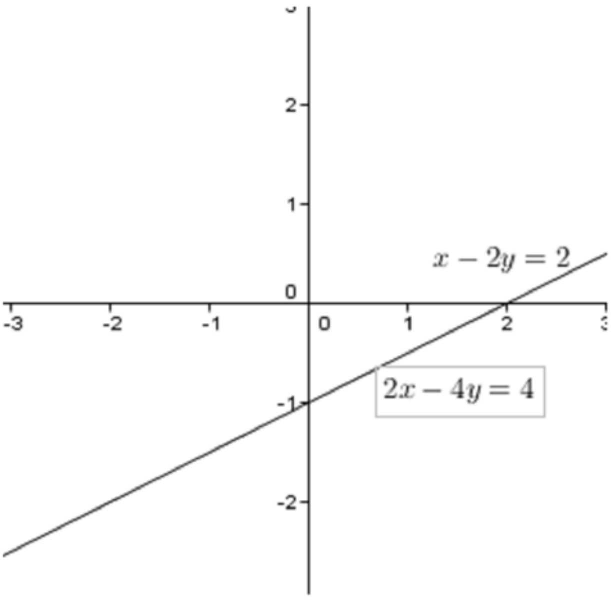
a) Perquè el sistema siga compatible determinat, afegirem una equació que no tinga els mateixos coeficients que la que ens dóna l'exercici. Per exemple, $x + y = 1$.



b) Perquè siga incompatible, els coeficients han de ser els mateixos però tindre diferent terme independent. Per exemple *x* – 2*y* = –3.



c) Perquè siga compatible indeterminat, posarem una equació proporcional a la que tenim. Per exemple 2*x* – 4*y* = 4.



Activitats proposades

23. Representa els següents sistemes i classifica'ls:

a) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ -2x+y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=4 \\ -y+3x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-9y=9 \\ 2x-6y=6 \end{cases}$

24. Resol gràficament els següents sistemes i classifica'ls:

a) $\begin{cases} 2x+y=6 \\ -3x+y=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3 \\ -2y+2x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 4x-6y=6 \end{cases}$

25. Resol gràficament els següents sistemes i classifica'ls:

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ -3x+y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=3 \\ -2y+x=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 4x-4y=4 \end{cases}$

3.3. Resolució de sistemes pel mètode de substitució

Recorda que:

El **mètode de substitució** consisteix a aïllar una incògnita d'una de les equacions del sistema i substituir l'expressió obtinguda en l'altra equació. Així, obtenim una equació de primer grau en la què podrem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, obtenim el valor de l'altra incògnita.

Exemple:

- *Resoldrem el sistema* $\begin{cases} \mathbf{2x-3y=1} \\ \mathbf{x+2y=4} \end{cases}$ *pel mètode de substitució:*

Aïllem *x* de la segona equació: $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=1 \\ x=4-2y \end{cases}$

i la substituïm en la primera:

$$\begin{cases} 2(4-2y)-3y=1 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8-4y-3y=1 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4y-3y=1-8 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7y=-7 \\ x=3-2y \end{cases} \Rightarrow y = 1.$$

Amb el valor obtingut de *y*, calculem la *x*: $x = 4 - 2y \Rightarrow x = 4 - 2\cdot 1 = 2.$

La solució és: $\begin{cases} \mathbf{x=2} \\ \mathbf{y=1} \end{cases}$. *Comprovem*: $\begin{cases} 2\cdot 2-3\cdot 1=4-3=1 \\ 2+2\cdot 1=4 \end{cases}$.

Activitats proposades

26. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 2x+5y=-6 \\ x+2y=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 4x+y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ 2x+y=10 \end{cases}$

27. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 3x+4y=26 \\ x-2y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y=26 \\ 3x+y=24 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 2x+3y=14 \end{cases}$

3.4. Resolució de sistemes pel mètode d'igualació

Recorda que:

El **mètode d'igualació** consisteix a aïllar la mateixa incògnita a les dues equacions que formen el sistema i igualar els resultats obtinguts. Així, obtenim una equació de primer grau en la que podrem calcular la incògnita aïllada. Amb el valor obtingut, calculem el valor de l'altra incògnita

Exemple:

- *Resoldrem el sistema* $\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 4} \end{cases}$ pel *mètode d'igualació:*

Aïllem la mateixa incògnita de les dues equacions que formen el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3y+1}{2} \\ x = 4 - 2y \end{cases}$$

Igualem ara els resultats obtinguts i resolem l'equació resultant:

$$\begin{cases} \dfrac{3y+1}{2} = 4 - 2y \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 1 = 8 - 4y \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 4y = 8 - 1 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7y = 7 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 - 2y \end{cases}$$

Amb el valor obtingut de *y*, calculem la *x*: $\begin{cases} y = 1 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 - 2\cdot 1 = 2 \end{cases}$

La solució és: $\begin{cases} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y = 1} \end{cases}$

Comprovem: $\begin{cases} 2\cdot 2 - 3\cdot 1 = 4 - 3 = 1 \\ 2 + 2\cdot 1 = 4 \end{cases}$

Activitats proposades

28. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} x + y = 11 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ 2x + 7y = -11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$

29. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 4x + 5y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 9x - 2y = 7 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$

4.5. Resolució de sistemes pel mètode de reducció

Recorda que:

El **mètode de reducció** consisteix a eliminar una de les incògnites sumant les dues equacions. Per a això es multipliquen una o ambdues equacions per un nombre de manera que els coeficients de *x* o *y* siguen iguals però de signe contrari.

Exemple:

- *Resoldrem el sistema* $\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = 1} \\ \mathbf{x + 2y = 4} \end{cases}$ pel *mètode de reducció:*

Multipliquem la segona equació per –2 perquè els coeficients de la *x* siguen iguals però de signe contrari i sumem les equacions obtingudes:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \xrightarrow[\cdot(-2)]{} \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -2x - 4y = -8 \end{cases} \xrightarrow[\text{sumem}]{} \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -7y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Amb el valor obtingut de *y*, calculem la *x*:

$$\begin{cases} 2x - 3\cdot(1) = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{2} = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

La solució és: $\begin{cases} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y = 1} \end{cases}$.

Comprovem: $\begin{cases} 2\cdot 2 - 3\cdot 1 = 4 - 3 = 1 \\ 2 + 2\cdot 1 = 4 \end{cases}$.

Activitats proposades

30. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -2x - 5y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 4y = 5 \end{cases}$

31. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = 7 \end{cases}$

5. SISTEMES D'EQUACIONS NO LINEALS

5.1. Concepte de sistema d'equacions no lineals

Un **sistema d'equacions és no lineal** quan almenys una de les seues equacions no és de primer grau

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On *a, b, a'* i *b' són* nombres reals que es denominen **coeficients** i *c* i *c'* també són nombres reals anomenats **termes independents**.

Anomenem **solució** del sistema al parell (*x, y*) de valors que satisfan les dues equacions del sistema.

Exemple:

- *Són sistemes d'equacions **no** lineals, per exemple:*

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ x + y = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \sqrt{x} + y = 3 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$

Activitats proposades

32. Raona si són o no sistemes d'equacions lineals els sistemes següents:

a) $\begin{cases} x \cdot y + 2y = 6 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5y - x = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ 3x + y^2 = 4 \end{cases}$

5.2. Resolució de sistemes d'equacions no lineals

La resolució d'aquest tipus de sistemes se sol fer pel mètode de **substitució** mitjançant els passos següents:

1.- S'aïlla una incògnita d'una de les equacions, si és possible de la de primer grau.

2.- Es substitueix la incògnita aïllada a l'altra equació.

3.- Es resol l'equació resultant.

4.- Cada un dels valors obtinguts es substitueix a l'altra equació, s'obtenen així els valors corresponents de l'altra incògnita.

Activitats resoltes

- *Resoldrem el sistema no lineal* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$

1.- S'aïlla una incògnita d'una de les equacions, si és possible de la de primer grau:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=7-x \end{cases}$$

2.- Es substitueix la incògnita aïllada a l'altra equació:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases}$$

3.- Es resol l'equació resultant:

$$\begin{cases} x^2+(7-x)^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+49-14x+x^2=25 \\ y=7-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-14x+24=0 \\ y=7-x \end{cases}$$

$$x=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 2\cdot 24}}{2\cdot 2}=\frac{14\pm 2}{4}\Rightarrow x_1=4 \wedge x_2=3.$$

4.- Cada un dels valors obtinguts se substitueix en l'altra equació, s'obtenen així els valors corresponents de l'altra incògnita:

Si $x = 3$, $y = 7 - 3 = 4$

Si $x = 4$, $y = 7 - 4 = 3$

Les solucions són **(3, 4)** i **(4, 3)**.

5.- *Comprovació*:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^2+4^2=9+16=25 \\ 3+4=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4^2+3^2=16+9=25 \\ 4+3=7 \end{cases}$$

Activitats proposades

33. Resol els següents sistemes no lineals:

a) $\begin{cases} x\cdot y+2=4x \\ y-x=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y^2-x^2=5 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=7 \\ x\cdot y=12 \end{cases}$

34. Resol els següents sistemes i comprova gràficament les solucions:

a) $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=2 \end{cases}$ c) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=81 \\ xy=4 \end{matrix}\right\}$

d) $\begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ x+y=5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ xy=6 \end{cases}$ f) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=18 \\ y=x \end{matrix}\right\}$

35. La trajectòria d'un projectil és una paràbola d'equació: $i = -x^2 + 5x$, i la trajectòria d'un avió és una recta d'equació: $y = 3x$. En quins punts coincideixen ambdues trajectòries? Representa gràficament la recta i la paràbola per a comprovar el resultat.

36. Resol els sistemes següents:

a) $\begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = -2 \\ 2x^2 - 3y^2 = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 5x^2 - 2y^2 = 5 \end{cases}$ *Ajuda*: Utilitza el mètode de reducció:

c) $\begin{cases} xy = \dfrac{1}{2} \\ x + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 4y = -3 \\ xy = 1 \end{cases}$ e) $\left.\begin{matrix} x + y - \dfrac{y}{x} = 1 \\ x + y = 2 \end{matrix}\right\}$

5.3. Sistemes d'equacions lineals de més de dues incògnites

La millor forma de resoldre sistemes lineals de més de dues incògnites és anar substituint el sistema per un altre equivalent de manera que cada vegada s'aconseguisca que siguen zeros els coeficients de més incògnites. Aquest procediment es denomina **Mètode *de Gauss***.

Activitats resoltes

Per a resoldre el sistema: $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$, deixem la primera equació sense modificar. Volem que la segona equació tinga un zero com a coeficient de la "*x*", per a això la multipliquem per 2 i li restem la primera. Perquè la tercera equació tinga un zero com a coeficient de la "*x*", la multipliquem per 2 i li restem la primera:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases}$$

Ara podem resoldre el sistema de dues equacions i dues incògnites format per les dues últimes equacions, o continuar amb el nostre procediment. Per a aconseguir que en la tercera equació el coeficient de la "y" siga un zero multipliquem la tercera equació per 3 i la segona per 7 i les restem:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 7y - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + 32z = 32 \end{cases}$$

i ara ja podem aïllar cada una de les incògnites de forma ordenada:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 + 3y + 5z = 8 \\ 0 + 0 + z = \dfrac{32}{32} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + (1) - 3(1) = 0 \\ 3y + 5(1) = 8 \to y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Activitats proposades

37. Resol els sistemes següents:

a) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + 2z = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = 5 \\ x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y - 3z = -6 \end{cases}$

3. RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

3.1. Resolució de problemes mitjançant equacions de 2n grau

Per a resoldre problemes per mitjà d'equacions de 2n grau, primer haurem de passar a llenguatge algebraic l'enunciat del problema i després resoldre'l seguint els passos següents:

1.- Comprendre l'enunciat.

2.- Identificar la incògnita.

3.- Traduir l'enunciat al llenguatge algebraic.

4.- Plantejar l'equació i resoldre-la.

5.- Comprovar la solució obtinguda.

Activitats resoltes

Resoldrem el problema següent:

- *Quin és el nombre natural el quíntuple del qual augmentat en 6 unitats és igual al seu quadrat?*

Una vegada comprés l'enunciat, identifiquem la incògnita, que en aquest cas, és el nombre que estem buscant.

2.- Nombre buscat = $\boldsymbol{x}$

3.- Traduïm ara el problema al llenguatge algebraic:

$$5x + 6 = x^2$$

4.- Resolem l'equació:

$$5x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = 6 \quad ; \quad x_2 = \frac{5-7}{2} = -1$$

Solució: Com l'enunciat diu "nombre natural" el nombre buscat és el 6.

5.- *Comprovació*: En efecte 5·6 + 6 = 36 = 6^2.

Activitats proposades

38. Quin nombre multiplicat per 4 és 5 unitats menor que el seu quadrat?

39. En una classe decideixen que tots enviaran una carta a la resta de companys. Un diu: Escriurem 380 cartes! Calcula el nombre d'alumnes que hi ha a la classe.

40. Calcula tres nombres consecutius tals que la suma dels seus quadrats siga 365.

41. Una fotografia rectangular mesura 14 cm de base i 10 cm d'altura. Al voltant de la foto hi ha un marge de la mateixa amplària per a la base que per a l'altura. Troba l'ample del marge, sabent que l'àrea total de la foto i el marge és de 252 cm^2.

42. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu doble és 85. Quin és el nombre?

43. Un triangle isòsceles té un perímetre de 20 cm i la base mesura 4 cm, calcula els costats del triangle i la seua àrea.

44. Un full de paper quadrat es doblega per la meitat. El rectangle resultant té una àrea de 8 cm^2. Quin és perímetre del dit rectangle?

45. Un pare diu: “El producte de l’edat del meu fill fa 5 anys pel de la seua edat fa 3 anys és la meua edat actual, que són 39 anys”. Calcula l’edat del fill.

46. Troba les dimensions de rectangle l’àrea del qual és 21 m^2, sabent que els seus costats es diferencien en 4 metres.

47. En un triangle rectangle el catet major mesura 3 cm menys que la hipotenusa i 4 cm més que l’altre catet. Quant mesuren els costats del triangle?

48. Troba dos nombres parells consecutius el producte dels quals siga 224.

49. Troba tres nombres imparells consecutius tals que si al quadrat del major se li resten els quadrats dels altres dos s’obté com resultat 15.

3.2. Resolució de problemes mitjançant sistemes d’equacions

Per a resoldre problemes per mitjà de sistemes d’equacions, primer haurem de passar a llenguatge algebraic l’enunciat del problema i després resoldre'l seguint els passos següents:

1.- Comprendre l’enunciat.

2.- Identificar les incògnites.

3.- Traduir l’enunciat al llenguatge algebraic.

4.- Plantejar el sistema i resoldre'l.

5.- Comprovar la solució obtinguda.

Activitats resoltes

Resoldrem el problema següent:

- *La suma de les edats d’un pare i el seu fill és 39 i la seua diferència 25. Quina és l’edat de cada un?*

Una vegada comprés l’enunciat, identifiquem les incògnites que, en aquest cas, són l’edat del pare i el fill

2.- Edat del pare = x

Edat del fill = y

3.- Passem l’enunciat a llenguatge algebraic:

La suma de les seues edats és 39:

$$x + y = 39$$

I la seua diferència 25:

$$x - y = 25$$

4.- Plantegem el sistema i el resolem pel mètode que ens resulte més senzill. En aquest cas, el fem per reducció:

$$\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 25 \end{cases} \xrightarrow[\textit{sumem}]{} \begin{cases} x + y = 39 \\ 2x + 0 = 64 \end{cases} \Rightarrow x = 64/2 = 32$$

$x + y = 39 \Rightarrow 32 + y = 39 \Rightarrow y = 39 - 32 = 7$.

Solució: El pare té 32 anys i el fill té 7 anys.

5.- Comprovació*:* En efecte, la suma de les edats és 32 + 7 = 39 i la diferència és 32 – 7 = 25.

Activitats proposades

50. La suma de les edats de Maria i Alfons són 65 anys. L'edat d'Alfons menys la meitat de l'edat de Maria és igual a 74. Quina edat tenen cadascú?

51. La suma de les edats de Mariló i Xavier és 32 anys. D'ací a 7 anys, l'edat de Xavier serà igual a l'edat de Mariló més 20 anys. Quina edat té cada un en l'actualitat?

52. Troba dos nombres la diferència dels quals siga 24 i la seua suma siga 104.

53. Un hotel té 42 habitacions (individuals i dobles) i 62 llits, quantes habitacions té de cada tipus?

54. En un triangle rectangle la hipotenusa mesura 10 cm i les longituds dels seus dos catets sumen 14 cm. Calcula l'àrea del triangle.

55. Neus li pregunta a Miriam per les seues qualificacions en Matemàtiques i en Llengua. Miriam li diu "La suma de les meues qualificacions és 19 i el producte 90". Neus li dóna l'enhorabona. Quines qualificacions va obtindre?

56. D'un nombre de tres xifres se sap que sumen 12, que la suma dels seus quadrats és 62, i que la xifra de les desenes és igual a la de les centenes més 1. Quin nombre és?

57. Es tenen tres sucs compostos de la manera següent:

- El primer de 40 dl de taronja, 50 dl de llima i 90 dl de pomelo.
- El segon de 30 dl de taronja, 30 dl de llima i 50 dl de pomelo.
- El tercer de 20 dl de taronja, 40 dl de llima i 40 dl de pomelo.

Es demana quin volum haurà de prendre's de cada un dels sucs anteriors per a formar un nou suc de 34 dl de taronja, 46 dl de llima i 67 dl de pomelo.

58. Es venen tres espècies de cereals: blat, ordi i mill. Cada kg de blat es ven per 2 €, el de l'ordi per 1 € i el de mill per 0.5 €. Si es ven 200 kg en total i s'obté per la venda 150 €, quants volums de cada cereal s'han venut?

59. Es desitja mesclar farina de 2 €/kg amb farina d'1 €/kg per a obtindre una mescla de 1,2 €/kg. Quants kg haurem de posar de cada preu per a obtindre 300 kg de mescla?

60. En una botiga hi ha dos tipus de joguets, els de tipus A què utilitzen 2 piles i els de tipus B que utilitzen 5 piles. Si en total en la botiga hi ha 30 joguets i 120 piles, quants joguets hi ha de cada tipus?

61. Un vianant ix d'una ciutat A i es dirigeix a una ciutat B que està a 15 km de distància a una velocitat de 4 km/h, i al mateix moment ix un ciclista de la ciutat B a una velocitat de 16 km/h i es dirigeix cap a A, quant temps porta el vianant caminant al moment de la trobada? A quina distància de B s'encreuen?

CURIOSITATS. REVISTA

El nombre d'or està per tot arreu

Coneixes un nombre irracional la part decimal del qual siga igual a la del seu quadrat?

Per trobar-lo hem de resoldre l'equació: $x^2 = x + n$, on n siga un nombre enter. Imaginem que n siga igual a 1, aleshores:

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} 1{,}618033988749... \\ -0{,}618033988749... \end{cases}$$

El nombre d'or!

Coneixes un nombre la part decimal del qual siga igual a la del seu invers?

Plantegem de nou l'equació: $1/x = x + n$, on n siga un nombre enter. Imaginem que n siga igual a –1, aleshores:

$1/x = x - 1 \Rightarrow 1 = x^2 - x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$

Tenim la mateixa equació d'abans! La solució torna a ser el nombre d'or!

El nombre d'or, Φ, està per tot arreu! Ja l'haviem trobat en pintura, arquitectura, escultures, i a la pròpia natura. Ara el trobem a les equacions.

El bròcoli és un conegut exemple de fractal. Cada un dels seus trocets és sembant al complet, amb un canvi d'escala.

També està relacionat amb el nombre d'or i la successió de *Fibonacci*. Si contem les espirals que es formen són dos nombres successius de la succesión de *Fibonacci*, cap a la dreta són 8 i cap a l'esquerra són 13. Recorda la successió és: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13

¿Sabries calcular $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}$?

Hi ha infinites arrels quadrades encadenades. Com si a infinit li sume 1 no canvia, una forma de trobar el seu valor es tornar a substituir x en la igualtat: $x = \sqrt{1+x}$ i resoldre l'equació:

$$x = \sqrt{1+x} \Rightarrow x^2 = 1 + x \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{1+4}}{2} = \Phi$$

¿Sabries calcular $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}$? És una fracció continua. Hi ha infinites fraccions encadenades. calcular-la de nou substituïm x: $x = 1 + \frac{1}{x}$ i resolem

Obtenció de la fórmula per a resoldre equacions de segon grau.

$ax^2 + bx + c = 0$, amb $a \neq 0$

$\Downarrow$

$ax^2 + bx = -c$

$\Downarrow$ Multipliquem per $4a$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

$\Downarrow$ Sumem b^2

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

$\Downarrow$ Emplenem quadrats

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

$\Downarrow$ Fem l'arrel quadrada

$2ax + b =$

$\Downarrow$Aïllem la x

$\Downarrow$

Tres equacions de segon grau interessants

$x^2 = 2$

Aquesta equació ens apareix en aplicar el Teorema de Pitàgores a un triangle rectangle isòsceles de costats iguals a 1, o al calcular la diagonal d'un quadrat de costat 1. La seua solució és la longitud de la hipotenusa o de la diagonal. Té d'interessant que es demostra que la solució NO és un nombre racional, un nombre que es puga escriure com a quocient de dos nombres enters.

$x + 1 = x^2$

També es pot escriure com:

que és una proporció, on x pren el valor $\approx 1{,}618\ldots$ que és el nombre d'or,

altre nombre irracional.

$x^2 = -1$

La tercera equació no té solució real, cap nombre real en elevar-lo al quadrat pot donar un nombre negatiu, però si ampliem el camp real amb la seua arrel $\sqrt{-1}$ = i, resulta que ja totes les equacions de segon grau tenen solució, i als nombres $a + b \cdot \mathrm{i}$ se'ls anomena **nombres complexos**.

Emmy Noether va ser una matemàtica alemanya d'origen jueu els treballs de la qual en Àlgebra van permetre resoldre el problema de la conservació de l'energia.

Problemes

Alguns problemes d'enginy que es resolen, (o no) per equacions o sistemes.

Els cocos

Tres mariners i una mona arrepleguen cocos. Abans de repartir-los s'adormen. A la nit un mariner reparteix el muntó de cocos en tres partes iguals, li sobra un que se'l dona a la mona, i es guarda la seua part. Un segon mariner fa la mateixa operació, li sobra també un i es guarda la seua part. El mateix fa el tercer mariner. Al matí següent reparteixen els cocos i ara el repartiment és exacte. Quants cocos hi havia?

La piscina

La piscina del poliesportiu municipal s'ha hagut que buidar per un problema de contaminació. Aquest procés s'ha realitzat en tres fases per a poder utilitzar l'aigua en la neteja de les instal·lacions, primer s'ha tret la tercera part, després la meitad de la resta i encara queden 150 m^3 d'aigua. Quina capacitat té la piscina?

Ajuda: No planteges una equació. Fes un diagrama.

Les perles del rajà

Un rajà va deixar a les seues filles un cert nombre de perles i va determinar que es fera de la manera següent: La filla major prendria una perla i un seté del que restara. La segona filla rebria dues perles i un seté del que restara. La tercera jove rebria tres perles i un seté del que restara. I així successivament. Feta la divisió cadascuna de les germanes va rebre el mateix nombre de perles. Quantes perles hi havia? Quantes filles tenia el rajà?

La invitació

Joan invita a Marta i a Elena a berenar. Prepara una llimonada i es disposa a servir-la. Marta la vol amb poca llima i Elena amb molta. Joan ha posat el suc de llima i l'aigua en gerres iguals i amb la mateixa quantitat. Per complaure a les seues invitades pren un got de la gerra amb llima i l'aboca en la de l'aigua, i a continuació pren un got de la mateixa grandària de la mescla i l'aboca en la de la llima. Hi haurà més llima en la gerra de l'aigua o aigua en la gerra de la llima?

Ajuda: Aquest problema és molt antic. Pareix d'equacions però així és molt difícil. Encara que pensant un poc, resulta molt senzill.

RESUM

		Exemples
Equació de segon grau	És una equació algebraica en què la major potència de la incògnita és 2. Té la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ on a, b i c són nombres reals, amb $a \neq 0$.	$-4x^2 + 5x - 8/3 = 0$
Resolució d'equacions de segon grau completes	S'usa la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0$: $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \dfrac{7 \pm \sqrt{9}}{2}$ $x_1 = 5$, $x_2 = 2$
Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 49 - 40 = 9$
Nombre de solucions d'una equació de segon grau	Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, té dues solucions reals i distintes Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, té una solució doble. Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'equació no té solució	$x^2 - 3x - 4 = 0$: $\Delta = 25 > 0$, té dues solucions 4 i -1. $x^2 - 4x + 4 = 0$: $\Delta = 0$, té una arrel doble: $x = 2$. $x^2 + 3x + 8 = 0$: $\Delta = -23$. No té solució real
Resolució d'equacions de segon grau incompletes	Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$, aïllem la incògnita: $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$: $x = 0$ i $x = \frac{-b}{a}$	$2x^2 - 50 = 0$: $x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ $3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x(x - 9) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0$; $x_2 = 9$.
Suma i producte d'arrels	$x_1 \, x_2 = \frac{c}{a}$; $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$	$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$; $x_2 = 2$.
Sistema d'equacions lineals	$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$	$\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$
Clasificació	**Compatible determinat**: Una única solució, el punt d'intersecció. Les rectes són **secants**: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$ **Compatible indeterminat**: Infinites solucions, per la qual cosa les rectes són **coincidents**: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$ **Incompatible**: No té solució, les rectes són **paral·leles**: $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x - 4y = 9 \end{cases}$	
Mètodes de resolució	**Substitució:** aïllar una incògnita i substituir en l'altra equació. **Igualació:** aïllar la mateixa incògnita de les dues equacions. **Reducció:** sumar les dues equacions, multiplicant-les per nombres adequats.	

EXERCICIS I PROBLEMES

Equacions de segon grau

1. Resol les següents equacions de 2n grau

a) $-x^2 - 7x - 12 = 0$ b) $x(-5 + x) = 3$ c) $3x^2 = 30x$

d) $3(x + 1) - x(5x + 2) = 7$ e) $3(7x - 2) + 3x(x - 4) = 1$ f) $4(x^2 - 4) - 5(3 + 2x) = -7$

g) $(3x + 2)\cdot(4x - 2) = -6x - 2$ h) $x\cdot(x + 5) = 168$ i) $2(3x^2 - 5x + 2) - 5x(6x - 3) = -2$

2. Resol les següents equacions de 2n grau amb denominadors:

a) $\frac{x^2-3}{2} - \frac{x+2}{4} = 5$ b) $\frac{x^2-5}{2} + \frac{2x^2-3x+7}{2} = 5$ c) $\frac{2x^2+1}{5} + \frac{x+3}{10} = 1$

d) $\frac{2-2x^2}{3} + \frac{4x-3}{2} = \frac{5}{6}$ e) $\frac{x^2-1}{3} - \frac{5x-9}{6} = 4x-3$ f) $\frac{2x+3x^2}{7} - \frac{3x-8}{14} = 1$

3. Resol mentalment les següents equacions de 2n grau:

a) $x^2 - 3x - 10 = 0$ b) $x^2 + 3x - 10 = 0$ c) $x^2 + 7x + 10 = 0$

d) $x^2 - 7x + 10 = 0$ e) $x(-1 + x) = 0$ f) $2x^2 = 50$

g) $x^2 - 5x + 6 = 0$ h) $x^2 - x - 6 = 0$ i) $x^2 + x - 6 = 0$

4. Factoritza les equacions del problema anterior. Així, si les solucions són 2 i 3, escriu:

$5x^2 - 25x + 30 = 0 \Leftrightarrow 5(x - 2)\cdot(x - 3) = 0$. Observa que si el coeficient de x^2 fóra diferent d'1 els factors han d'estar multiplicats pel dit coeficient.

5. Quan el coeficient b és parell ($b = 2B$), pots simplificar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm \sqrt{4B^2-4ac}}{2a} = \frac{-2B \pm 2\sqrt{B^2-ac}}{2a} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-ac}}{a}$$

Així per resoldre $x^2 - 8x + 12 = 0$ basta dir $x = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2$, per tant les seues solucions són 6 i 2.

Utilitza aqueixa expressió per a resoldre:

a) $x^2 - 2x + 8 = 0$ b) $x^2 - 6x - 10 = 0$ c) $x^2 + 4x + 9 = 0$

6. Resol mentalment les equacions següents, després desenvolupa les expressions i utilitza la fórmula general per a tornar a resoldre-les.

a) $(x - 2)\cdot(x - 5) = 0$ b) $(x + 1)\cdot(x - 6) = 0$ c) $(x - 3)\cdot(x - 5) = 0$

d) $(x - 4)\cdot(x + 7) = 0$ e) $(x + 8)\cdot(x - 9) = 0$ f) $(x - 2)\cdot(x + 3) = 0$

7. Determina el nombre de solucions reals que tenen les següents equacions de segon grau calculant el seu discriminant, i després resol-les.

a) $x^2 + 7x - 3 = 0$ b) $5x^2 + 7x - 8 = 0$ c) $2x^2 + 3x + 9 = 0$

d) $2x^2 - 2x + 7 = 0$ e) $3x^2 - 2x - 7 = 0$ f) $4x^2 + x - 5 = 0$

8. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguen cap solució real. *Ajuda*: Utilitza el discriminant.

9. Escriu tres equacions de segon grau que tinguen una solució doble.

10. Escriu tres equacions de segon grau que tinguen dues solucions reals i distintes.

11. Escriu tres equacions de segon grau que no tinguen solució real.

12. Resol les següents equacions polinòmiques:

a) $x^5 - 37x^3 + 36x = 0$ b) $x^3 - 2x^2 - 5x = 0$ c) $2x^3 - x^2 - 4x = 0$

d) $x^4 - 5x^2 - 2 = 0$ e) $2x^4 = 32x^2 - 96$ f) $x(x - 3)(2x + 3)(3x - 5) = 0$

13. Resol les següents equacions aplicant un canvi de variable:

a) $x^8 + 81 = 82x^4$ b) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$ c) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ d) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

14. Resol les següents equacions racionals:

a) $3x + \frac{2}{x} = 1$ b) $\frac{2}{3x} + \frac{5}{6x} = x$ c) $\frac{2}{x-5} + 3 = \frac{1}{x-2}$ d) $\frac{3x}{2-x} - 4x = 2$

e) $\frac{3}{x+2} = \frac{2(3x+1)}{x-2} + 1$ f) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{5+2x}{2x} = 4$ g) $\frac{5x-3}{x+1} - \frac{5+3x}{x-1} = 2$

h) $\frac{4}{1-x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x-x^2}$ i) $\frac{5x}{x-2} - \frac{2x}{x^2-4} = \frac{x}{3}$ j) $\frac{1}{3} = \frac{x-4}{6-x}$

15. Resol les següents equacions irracionals:

a) $x = -2 + \sqrt{5 + 4x^2}$ b) $\sqrt{16 - x} = x - 4$ c) $5 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 2x$

d) $\sqrt{x} - \sqrt{x-2} = 5$ e) $\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1} + 2 = 0$ f) $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 3$

g) $5\sqrt{x-2} + 1 = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ h) $\sqrt{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 2$ i) $\sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} = 3$

16. Resol les equacions següents: a) $3^{2x} = \frac{1}{81}$ b) $2^{2x} = \frac{1}{1024}$

Sistemes lineals d'equacions

17. Resol els següents sistemes pel mètode de substitució:

a) $\begin{cases} 4x-3y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+4y=5 \\ 2x+5y=7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x+y=2 \end{cases}$

18. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació:

a) $\begin{cases} -3x+2y=-1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 4x-y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 7x-4y=10 \\ -8x+3y=-13 \end{cases}$

19. Resol els següents sistemes pel mètode de reducció:

a) $\begin{cases} 7x-2y=5 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+5y=20 \\ -x-6y=-14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-6y=0 \\ -5x+2y=-9 \end{cases}$

20. Resol de forma gràfica els següents sistemes

a) $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x+3y=5 \\ x-7y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ -7x+5y=3 \end{cases}$

21. Resol els sistemes següents:

a) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{5}-\dfrac{3y-1}{2}=-1 \\ \dfrac{3x+1}{2}+\dfrac{3y-1}{4}=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{5y+7}{6}=-2 \\ 4x+y=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{5x+1}{2}+\dfrac{2y-5}{3}=4 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

22. Copia al teu quadern i completa els següents sistemes incomplets de manera que es complisca el que es demana en cada un:

Compatible indeterminat

a) $\begin{cases} (\ )x+2y=(\ ) \\ 3x-y=5 \end{cases}$

Incompatible

b) $\begin{cases} -3x+y=1 \\ (\ )x+y=6 \end{cases}$

La seua solució siga $x = 2$ i $y = 1$

c) $\begin{cases} 2x-3y=(\ ) \\ (\ )x+2y=8 \end{cases}$

Incompatible

d) $\begin{cases} 2x-3y=-4 \\ 6x+(\ )y=(\ ) \end{cases}$

La seua solució siga $x = -1$ i $y = 1$

e) $\begin{cases} 4x+(\ )y=-1 \\ (\ )x+y=5 \end{cases}$

Compatible indeterminat

f) $\begin{cases} (\ )x+8y=(\ ) \\ x+2y=-3 \end{cases}$

23. Escriu tres sistemes lineals que siguen incompatibles.

24. Escriu tres sistemes lineals que siguen compatibles indeterminats.

25. Escriu tres sistemes lineals que siguen compatibles determinats.

26. Resol els següents sistemes pel mètode d'igualació i comprova la solució gràficament. De quin tipus és cada sistema?

a) $\begin{cases} -2x+6y=4 \\ 7x-3y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y=-3 \\ 3x-3y=-9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y=4 \\ -x+3y=-5 \end{cases}$

Problemes

27. En una botiga lloguen bicicletes i tricicles. Si tenen 30 vehicles amb un total de 80 rodes, quantes bicicletes i quants tricicles tenen?

28. Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 12 li falten 64 unitats per a completar el seu quadrat?

29. Descompon 12 en dos factors la suma dels quals siga 7.

30. El triple del quadrat d'un nombre augmentat en el seu doble és 616. Quin nombre és?

31. La suma dels quadrats de dos nombres imparells consecutius és 130. Determina els dits nombres.

32. Van carregats un ase i un mul. L'ase es queixava del pes que portava damunt. El mul li va contestar: Si jo portara un dels teus sacs, portaria el doble de càrrega que tu, però si tu prens un dels meus, els dos portarem la mateixa càrrega. Quants sacs porta cada un?

33. Quin nombre multiplicat per 3 és 28 unitats menor que el seu quadrat?

34. Calcula tres nombres consecutius la suma de quadrats dels quals és 110.

35. D'ací a 2 anys, l'edat de Raquel serà la meitat del quadrat de l'edat que tenia fa 10 anys. Quina edat té Raquel?

36. Dos nombres es diferencien en 3 unitats i la suma dels seus quadrats és 185. Quins són els dits nombres?

37. La suma de dos nombres és 2 i el seu producte és –80, de quins nombres es tracta?

38. Maria vol formar safates d'un quilogram amb caramels i bombons. Si els caramels li costen a 3 euros el quilo i els bombons a 7 euros el quilo, i vol que el preu de cada safata siga de 5 euros, quina quantitat haurà de posar de cada producte? Si vol formar 100 safates, quina quantitat de caramels i de bombons necessitarà?

39. Determina els catets d'un triangle rectangle la suma dels quals és 17 cm i la hipotenusa del dit triangle mesura 13 cm.

40. El producte de dos nombres és 6 i la suma dels seus quadrats 13. Calcula els dits nombres

41. La suma de dos nombres és 12. El doble del primer més el triple del segon és 31. De quins nombres es tracta?

42. A un garatge hi ha 30 vehicles entre cotxes i motos. Si en total hi ha 80 rodes, quants cotxes i motos hi ha al garatge?

43. L'edat actual de Lluis és el doble de la de Miriam. D'ací a 10 anys, les seues edats sumaran 50. Quants anys tenen actualment Lluis i Miriam?

44. A la meua classe hi ha 25 persones. Ens han regalat a cada xica 3 adhesius i a cada xic 2 xapes. Si en total hi havia 65 regals. Quants xics i xiques som a classe?

45. Entre el meu iaio i el meu germà tenen 80 anys. Si el meu iaio té 50 anys més que el meu germà, quina edat té cada un?

46. Tres entrepans i un refresc costen 8 €. Quatre entrepans i dos refrescos costen 12 €. Quin és el preu de l'entrepà i el refresc?

47. A una granja hi ha gallines i ovelles. Si es compten els caps, són 40. Si es compten les potes, són 100. Quants gallines i ovelles hi ha a la granja?

48. Un rectangle té un perímetre de 180 metres. Si el llarg és 10 metres major que l'ample, quines són les dimensions del rectangle?

49. A un portamonedes hi ha bitllets de 5 € i 10 €. Si en total hi ha 10 bitllets i 75 €, quants bitllets de cada valor hi ha al portamonedes?

50. A una baralla entre aranyes i vespes, hi ha 13 caps i 90 potes. Sabent que una aranya té 8 potes i una vespa 6, quantes vespes i aranyes hi ha a la baralla?

51. Una classe té 30 estudiants, i el nombre de xiques és doble que el de xics, quants xics i xiques hi ha?

52. Neus té 9 anys més que el seu germà Daniel, i sa mare té 50 anys. D'ací a 2 anys l'edat de la mare serà doble de la suma de les edats dels seus fills, quines edats tenen?

53. Es mesclen 18 kg d'arròs de 1,3 € el quilogram amb 24 kg d'arròs de preu desconegut, resultant el preu de la mescla de 1,7 € el kg. Quin preu tenia el segon arròs?

54. L'altura d'un trapezi isòsceles és de 3 cm, el perímetre, 28 cm, i els costats inclinats són iguals a la base menor. Calcula l'àrea del trapezi.

55. Dos autobusos ixen, un des de Madrid i l'altre des de Càceres a les 9 del matí. Un va a 80 km/h i l'altre a 100 km/h. A quina hora s'encreuen? A quants km de Madrid estaran?

56. En un concurs es guanyen 40 euros per cada resposta encertada i es perden 80 per cada fallada. Després de 10 preguntes, Carmela porta guanyats 280 euros. Quantes preguntes ha encertat?

57. Paco ha comprat 5 sucs i 4 batuts per 5,7 €, després ha comprat 7 sucs i 5 batuts i li han costat 5,9 €. Calcula els preus d'ambdues coses.

58. Quina fracció és igual a 1 quan es suma 1 al numerador i és igual a 1/2 si es suma 2 al denominador?

59. El quocient d'una divisió és 3 i el residu és 1. Si el divisor disminueix en 1 unitat, el quocient augmenta en 3 i el residu nou és 1. Trobar el dividend i el divisor.

60.

61. Dues amigues van anar a pescar. Al final del dia una va dir: "Si tu em dónes un dels teus peixos, llavors jo tindré el doble que tu". L'altra li va respondre: "Si tu em dónes un dels teus peixos, jo tindré el mateix nombre de peixos que tu". Quants peixos tenia cada una?

62. Calcula les dimensions d'un rectangle sabent que la seua àrea és 35 cm^2 i el perímetre del qual, 24 cm.

63. Un vianant ix d'una ciutat "A" a una velocitat de 4 km/h, i es dirigeix a una ciutat "B" que està a 20 km de la ciutat "A", 30 minuts després ix un ciclista de la ciutat "B" a una velocitat de 20 km/h i es dirigeix cap a "A", quant temps porta el vianant caminant en el moment de la trobada? A quina distància de "B" s'encreuen?

64. Es desitja mesclar oli de 2,7 €/l amb un altre oli de 3,6 €/l de manera que la mescla resulte a 3 €/l. Quants litres de cada classe han de mesclar-se per a obtindre 100 litres de la mescla?

65. En intercanviar les xifres d'un nombre de dues xifres s'obté un altre que és 45 unitats major. Troba el nombre inicial.

66. La diagonal d'un rectangle medeix 25 cm i el perímetre 70 cm. Troba els costats del rectangle.

67. Una tanca rodeja un terreny rectangular de 300 m^2. Si la tanca medeix 70 metres, calcula les dimensions del terreny.

68. Diversos amics faran un regal de bodes que costa 800 euros, que pagaran a parts iguals. A última hora s'apunten sis amics més, amb la qual cosa cada un toca a 30 euros menys. Quants amics eren inicialment? Quant pagarà al final cada un?

69. Les diagonals d'un rombe es diferencien en 2 cm i la seua àrea és de 24 cm^2. Calcula el seu perímetre.

70. Un tren ix de Barcelona cap a Madrid a una velocitat de 200 km/h. Una hora més tard ix un altre tren de Madrid cap a Barcelona a 220 km/h; la distància entre les dues ciutats és de 618 km. Al cap de quant temps s'encreuen els dos trens? A quina distància de Barcelona?

71. Un cotxe ix d'una ciutat "A" a una velocitat de 100 km/h i 30 minuts més tard un altre cotxe ix de "A" en la mateixa direcció i sentit a una velocitat de 120 km/h, quant temps tardarà el segon a atrapar al primer i a quina distància de "A" es produeix la trobada?

AUTOAVALUACIÓ

1. Les solucions de l'equació $2(x-3)-3(x^2-4)=1$ són:

a) $x = 10/3 \wedge x = -2$ b) $x = 5/3 \wedge x = -1$ c) $x = 1 \wedge x = -2/3$ d) $x = 3/2 \wedge x = -7/6$

2. Les solucions de l'equació $80 = x(x-2)$ són:

a) $x = 8 \wedge x = -10$ b) $x = 40 \wedge x = 2$ c) $x = 10 \wedge x = -8$ d) $x = 10 \wedge x = 8$

3. Les solucions de l'equació $\frac{3x-1}{2} - \frac{x+5}{6} = \frac{x^2}{3}$ són:

a) $x = 4 \wedge x = -2$ b) $x = 3 \wedge x = -2$ c) $x = 1/5 \wedge x = 2$ d) $x = 2 \wedge x = 2$

4. Les solucions de l'equació $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$ són:

a) 2, –2, 5, –5 b) 3, –3, 2, –2 c) 1, –1, 4, –4 d) 3, –3, 5, –5

5. Les rectes que formen el sistema $\begin{cases} 7x+21y=14 \\ 2x+6y=4 \end{cases}$ són:

a) Secants b) Paral·leles c) Coincidents d) S'encreuen

6. La solució del sistema $\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ -2x+3y=2 \end{cases}$ és:

a) $x = 2$ i $y = 1$ b) $x = 2$ i $y = 2$ c) $x = 3$ i $y = 2$ d) No té solució

7. La solució del sistema $\begin{cases} 3+2x=x-1+y \\ 2x-9y=-43 \end{cases}$ és:

a) $x = 1$ i $y = 5$ b) $x = -2$ i $y = -5$ c) $x = -43/2$ i $y = 0$ d) $x = 3$ i $y = 4$

8. La solució del sistema $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -2x+3y+z=7 \\ 2x-3y+2z=2 \end{cases}$ és:

a) $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$ b) $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$ c) $x = -1$, $y = -2$, $z = -3$ d) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

9. A una granja, entre gallines i vaques hi ha 120 animals i 280 potes. Quants gallines i vaques hi ha a la granja?

a) 90 gallines i 30 vaques b) 100 gallines i 20 vaques c) 80 gallines i 40 vaques

10. Quina és l'edat d'una persona si en multiplicar-la per 5, li falten 234 unitats per a arribar al seu quadrat?

a) 18 anys b) 20 anys c) 25 anys d) 28 anys