Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques:

4tB ESO. Capítol 11

Funcions polinòmiques, definides a trossos i de proporcionalitat inversa

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: David Miranda Suárez

Revisora: María Molero

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

Índex

1. FUNCIONS POLINÒMIQUES DE PRIMER GRAU.

1.1. PROPORCIONALITAT DIRECTA

1.2. FUNCIÓ LINEAL. RECTES DE LA FORMA $y = m \cdot x$

1.3. ESTUDI DEL PENDENT

1.3. RECTES DE LA FORMA $y = m \cdot x + n$

2. FUNCIONS POLINÒMIQUES DE SEGON GRAU

2.1. FUNCIONS POLINÒMIQUES DE SEGON GRAU. PARÀBOLA $y = a \cdot x^2$

2.2. TRANSLACIONS AL PLA.

2.3. FUNCIÓ QUADRÀTICA. PARÀBOLES DE LA FORMA $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

3. FUNCIONS DE PROPORCIONALITAT INVERSA

3.1. FUNCIÓ DE PROPORCIONALITAT INVERSA $y = \frac{k}{x}$

3.2. LA HIPÈRBOLA $y = \frac{k}{x-b} + a$

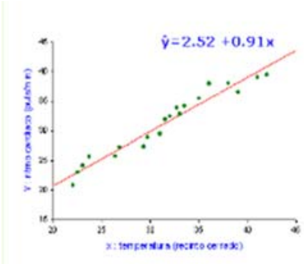
4. FUNCIONS DEFINIDES A TROSSOS

Resum

A la nostra vida diària fem ús contínuament de les relacions de proporcionalitat, com quan comprarem qualsevol producte al supermercat, o si volem comparar dues tarifes de llum distintes per a saber quina ens convé triar. En aquests casos, la representació gràfica ens facilita la presa de decisions. El llançament d'objectes a certes distàncies, com llançar un paper al fem, omplir el got d'aigua o fer un salt: la trajectòria que descriu és una corba que rep el nom de *paràbola*.

En aquest capítol estudiarem les propietats més importants de les relacions *de proporcionalitat directa i inversa* i les funcions *polinòmiques*, així com els seus elements i representacions gràfiques al pla cartesià.

Comprendre aquestes funcions és molt útil per a la ciència, ja que s'utilitzen per a comparar dades i per a saber si aqueixes dades tenen alguna relació lineal (les dades es comporten com una recta) o d'un altre tipus (polinòmica, exponencial,…).



Exemple de Recta de regressió

A l'estudi d'aquestes dades i les seues corbes es dedica l'estadística mitjançant *l'anàlisi de regressió.* Amb l'aproximació de dades a rectes o corbes conegudes, es realitzen estudis i prediccions, d'ací la seua importància per a la vida real.

Abans de començar

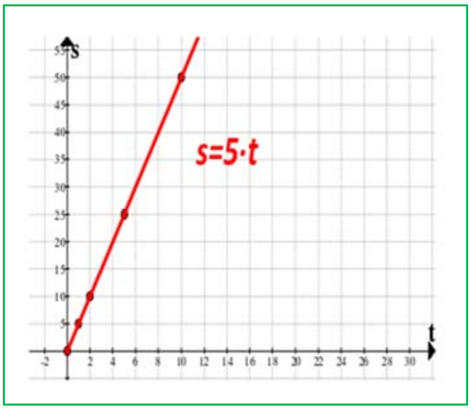
Activitats resoltes

Abans de començar, representarem mitjançant gràfiques les situacions següents:

0. *Situació 1:* La gràfica s-t d'un moviment rectilini uniforme: l'espai recorregut, en funció del temps, per un ciclista que es desplaça amb una velocitat de 5 m/s.

En tractar-se d'un moviment rectilini uniforme, podem descriure l'espai recorregut en funció del temps mitjançant la fórmula $s = v \cdot t$ on *v* = 5 m/s.

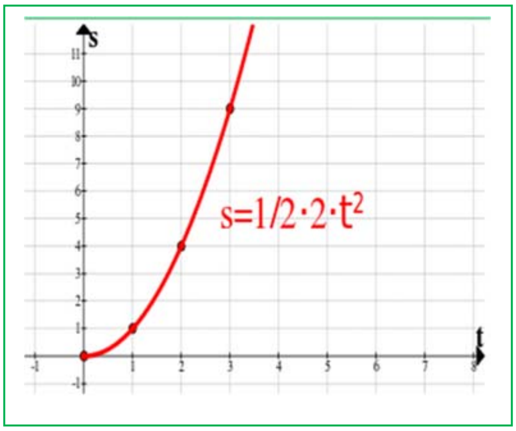
Temps (*t*)	Espai (*s*)
0	0
1	5
2	10
5	25
10	50



1. *Situació 2*: La gràfica v-t d'un moviment rectilini uniformement accelerat: l'espai recorregut per un ciclista que es desplaça amb una acceleració de 2 m/s^2.

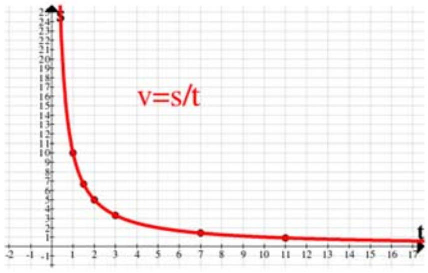
En aquest cas es tracta d'un moviment rectilini uniformement accelerat, per tant podem descriure l'espai recorregut per la fórmula $s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$, on l'espai inicial i la velocitat inicial són 0. Representem la funció $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$.

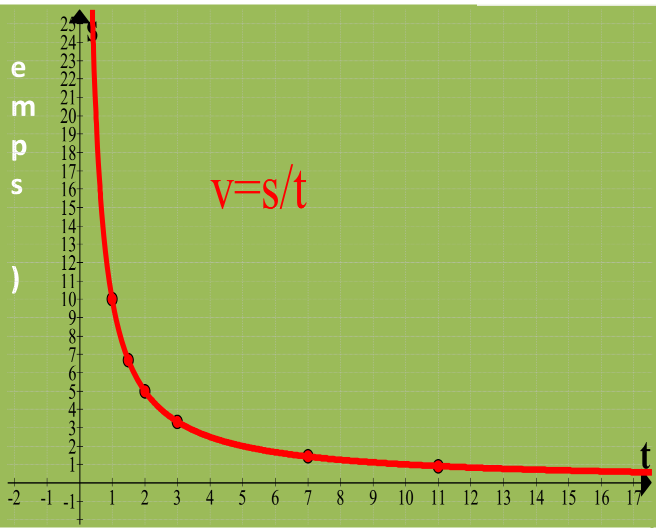
Temps (*t*)	Espai (*s*)
0	0
1	1
2	4
3	9



2. *Situació 3*: Representem la velocitat d'un ciclista respecte al temps, quan recorre un espai de 10 m.

El moviment que descriu és un moviment rectilini uniforme, per tant la fórmula que representem és $v = \dfrac{s}{t}$, i com l'espai que recorre el ciclista és de 10 metres, $v = \dfrac{10}{t}$





Temps (t)	Velocitat (v)
1	10
1.5	6.67
2	5
3	3.33
5	2
7	1.43
11	0.91

1. FUNCIONS POLINÒMIQUES DE PRIMER GRAU

1.1. Proporcionalitat directa

Recorda que dues magnituds són **directament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda multiplicada o dividida pel mateix nombre.

En realitzar el quocient de qualsevol dels valors d'una variable i els corresponents de l'altra, obtenim la **raó de proporcionalitat directa *k***.

Exemple:

3. A la situació 1, les magnituds espai i temps són directament proporcionals

Temps (t)	0	1	2	5	10
Espai (s)	0	5	10	25	50

i la raó de proporcionalitat és $k=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{25}{5}=\frac{50}{10}=5$

Si observem la seua gràfica, podem comprovar que es tracta d'una semirecta l'origen de la qual és l'origen de coordenades. En aquesta situació no és interessant considerar temps negatius, raó per la qual la representació és una semirecta.

La representació gràfica al pla cartesià de dues magnituds **directament proporcionals** és una **recta** que passa per l'origen de coordenades.

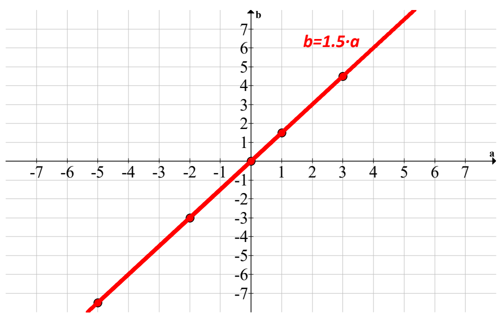
Es pot escriure la relació entre la magnitud A (a) i la magnitud B (b) com a $b=k\cdot a$ on k és la **raó de proporcionalitat**.

Per a representar aquestes relacions de proporcionalitat directa, n'hi ha prou amb situar els valors de cada magnitud en el pla cartesià i unir-los mitjançant una recta.

Activitats resoltes

4. Representa gràficament la següent relació de proporcionalitat donada en la taula següent:

Magnitud A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (b)	–7,5	–3	0	1,5	4,5



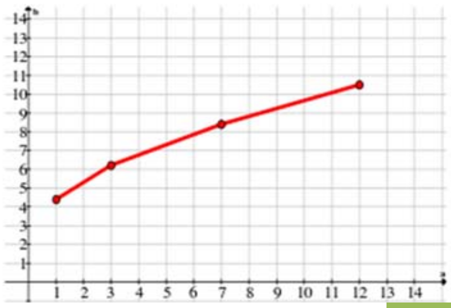
En calcular la raó de proporcionalitat s'obté:

$$k=\frac{-7.5}{-5}=\frac{-3}{-2}=\frac{1.5}{1}=\frac{4.5}{3}=1.5$$

La relació es defineix així: $b=1.5\cdot a$

5. La següent taula ens mostra el pes d'un bebè els primers mesos de creixement. Utilitzant una gràfica, decidir si són magnituds directament proporcionals.

Mesos	1	3	7	12
Pes (Kg)	4,4	6,2	8,4	10,5



En representar els punts en el pla, s'observa que la gràfica no és una recta, llavors **no són directament proporcionals**.

Activitats proposades

1. El consum mitjà d'aigua al dia per habitant (en 2011) és de 142 litres. Representa gràficament el consum d'una persona en una setmana.

2. L'aigua virtual és l'aigua necessària per a crear un producte. Representa gràficament les relacions següents:

a. 71 litres per a produir una poma.

b. 10.850 litres per a produir uns vaquers.

c. 4.000 litres per a produir una camiseta.

1.2. Funció lineal. Rectes de la forma $y = m \cdot x$

La representació gràfica de dues magnituds directament proporcionals és una recta que passa per l'origen. Per tant la relació de proporcionalitat directa és una funció lineal.

Una **funció lineal** és una funció polinòmica de primer grau. La seua representació al pla cartesià és una recta.

Hi ha dos tipus de funcions lineals:

- Rectes l'expressió algebraica de les quals és $y=m·x$
- Rectes la funció de les quals ve donada per $y=m·x+n$

En aquest apartat estudiarem les funcions lineals del primer tipus, és a dir les rectes de la forma $y=m·x$

Exemple:

0. Les proporcions es representen com a rectes de la forma $b=k·a$
   a. on k és la raó de proporcionalitat, $k = \frac{b}{a}$
   b. a i b són els valors que prenen les magnituds A i B respectivament.

6. La relació pes – cost de qualsevol producte, és una proporcionalitat i es representa amb rectes de la forma $y=m·x$

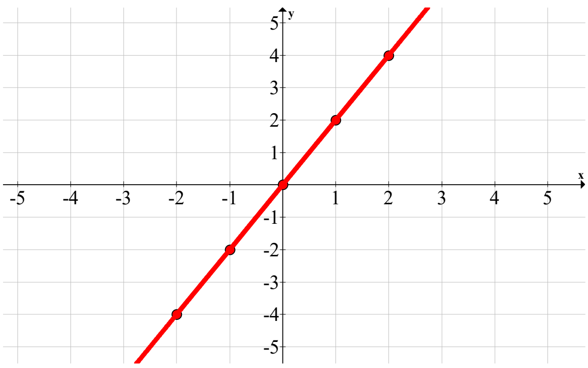
7. Moltes de les relacions en física són proporcionals i es representen mitjançant rectes com a espai – temps, pes – densitat , força – massa, …

Activitats resoltes

8. Representa la recta $y=2 \cdot x$

Per a això, cal construir una taula de valors i representar els punts. La recta és la conseqüència d'unir els punts.

Es pot observar, que la variable y es defineix donant valors a la variable x . Per aquesta raó x és la variable independent (pot ser qualsevol valor que se li done) e y és la variable dependent (depén del valor de la x).



x	–2	–1	0	1	2
y	–4	–2	0	2	4

Nota: per a definir una recta és prou de donar dos punts d'ella.

Les rectes $y=m·x$ tenen els següents components:

- x és la variable **independent**.
- y és la variable **dependent**.
- m és el **pendent** de la recta, i és el que diferència una recta d'una altra.

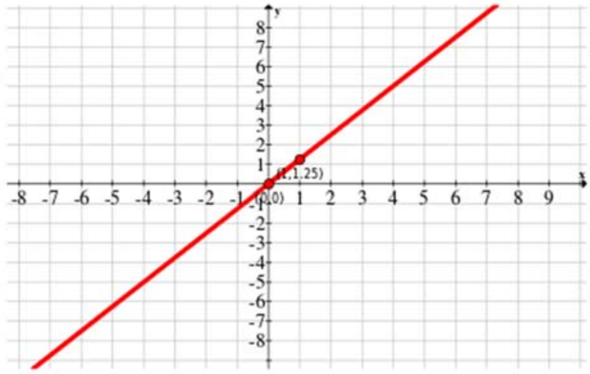
Les característiques més importants:

- Passen per l'origen de coordenades, és a dir, el punt (0,0) pertany a la recta.

- El seu domini i el seu recorregut són tots els reals: tant la x com la y accepten qualsevol valor.
- Són simètriques respecte a l'origen, o el que és el mateix, són funcions imparelles.

Activitats resoltes

0. Estudia el domini, màxims i mínims i simetries de la funció lineal $y = 1,25 \cdot x$



En tractar-se d'una recta, es pot observar que el domini són tots els reals, ja que s'admet qualsevol valor de la x.

Si no es considera cap interval, la recta no té màxims ni mínims absoluts i relatius.

Per a veure la simetria, prenem la funció $y = f(x) = 1,25 \cdot x$

$f(-x) = -1,25 \cdot (-x) = -1,25 \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f és imparella$

És a dir, és simètrica respecte a l'origen de coordenades.

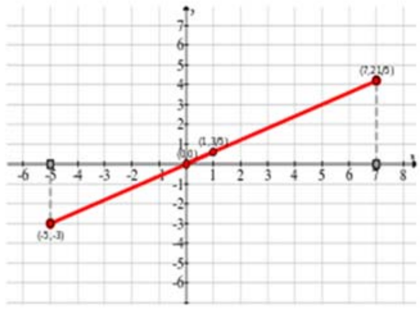
9. Estudia la funció $y = \frac{3}{5} \cdot x$ a l'interval $[-5, 7]$.

El domini és tot l'interval [-5,7].

$f(-x) = \frac{3}{5} \cdot (-x) = -\frac{3}{5} \cdot x = -f(x) \Leftrightarrow f és imparella$

simètrica respecte a l'origen.

Als extrems de l'interval, hi ha mínim (–5, –3) i màxim (7,21/5).



Activitats proposades

3. Troba el domini, màxims i mínims i la simetria de les següents rectes:

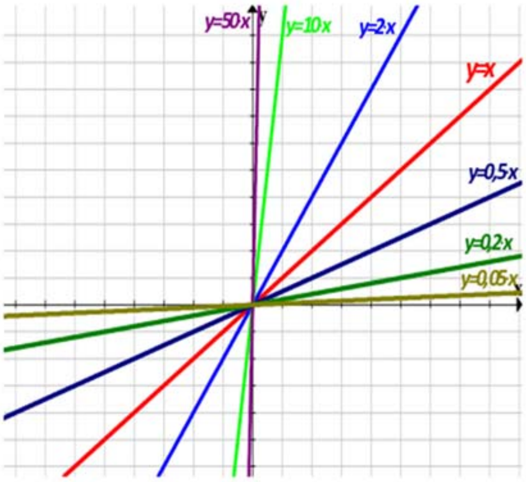
a) $y=4 \cdot x$ b) $y = \frac{x}{3}$ c) $y= 2,65 \cdot x$

1.3. Estudi del pendent

Com hem vist amb anterioritat, el pendent m és el que diferència unes rectes d'altres. Mesura la inclinació de la recta respecte a l'eix d'abscisses.

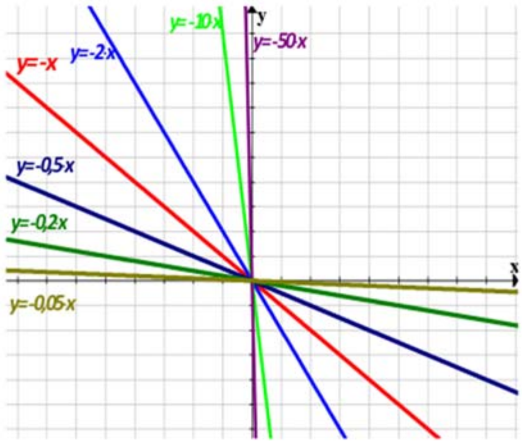
A les relacions de proporcionalitat directa, el pendent ve donat per la raó de proporcionalitat *k*.

Observa al següent gràfic com varia la recta segons anem augmentant o disminuint el pendent. Partim de la recta $y=x$, on $m=1$.



- Si augmenta m, llavors la recta es fa cada vegada més vertical, fins quasi convertir-se en l'eix y.
- Si disminueix m, llavors la recta es fa cada vegada més horitzontal, fins quasi convertir-se en l'eix x

Ara observa el que ocorre quan el pendent m pren valors negatius.



- Si augmenta m, llavors la recta es fa cada vegada més horitzontal, fins quasi convertir-se en l'eix x.
- Si disminueix m, llavors la recta es fa cada vegada més vertical, fins quasi convertir-se en l'eix y.

Com es pot observar, en variar el pendent la inclinació de la recta també canvia, segons es van donant valors m .

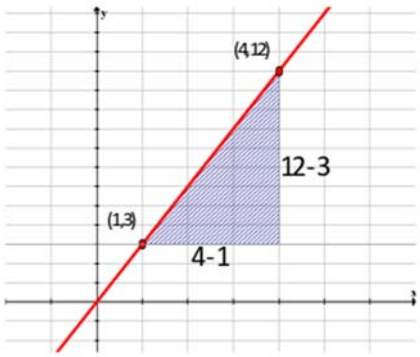
El pendent de la recta és el valor que mesura la inclinació de la recta, és a dir, mesura el creixement o decreixement de la funció lineal:

-Si $m>0$, la recta és creixent.

-Si $m<0$, la recta és decreixent.

El pendent és el coeficient que acompanya a la variable independent x .

Interpretació geomètrica del pendent



El pendent de la recta no sols indica el creixement i decreixement de la funció, sinó que també mesura quant creix o quant decreix. Es pot dir que el pendent mesura el creixement de la recta en funció del que avança:

0. Si $m > 0$:

a. Per a valors alts de m la recta creix amb major rapidesa, açò és, la recta "puja" molt i avança poc.

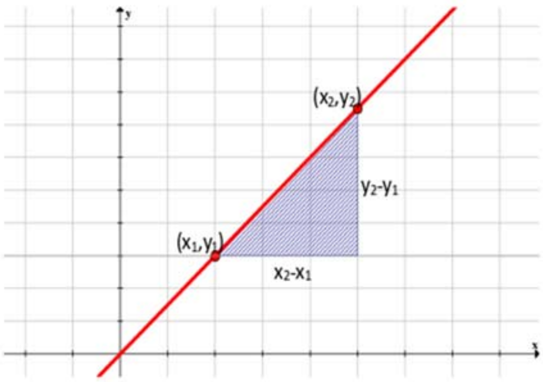
b. Per a valors xicotets de m la recta creix amb menys rapidesa, és a dir, "puja" poc i avança molt.

10. Si $m < 0$:

a. Per a valors alts de m la recta decreix amb menys rapidesa, és a dir, baixa poc i avança molt.

b. Per a valors xicotets de m la recta decreix amb major rapidesa, açò és, la recta "baixa" molt i "avança" poc.

Una manera de calcular el pendent, és dividint el valor del que puja la recta entre el que avança, com es mostra al dibuix següent:



Donats dos punts qualssevol de la recta, el pendent es calcula de la manera següent:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

és a dir, $m = \frac{elquepuja}{elqueavança}$

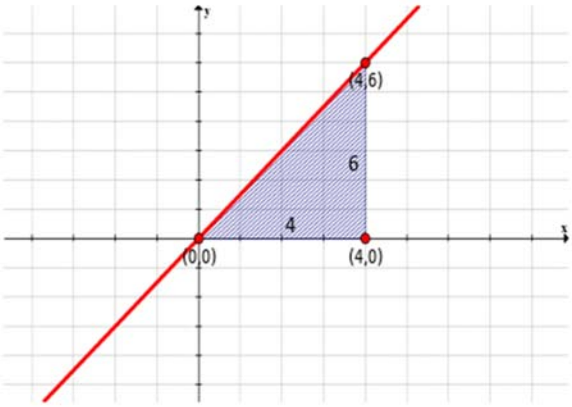
Exemple:

La recta puja 12 – 3 = 9 i avança 4 – 1 = 3, llavors

$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

Activitats resoltes

11. Calcula el pendent de la següent recta i la seua expressió algebraica.



Prenem dos punts qualssevol que pertanguen a la recta, el (0,0) i el (4,6).

En aquest cas, l'altura del triangle ombreig ens indica el valor que puja la recta, 6, i la base és el valor que la recta avança, 4.

En dividir aquests valors, obtenim el pendent i l'expressió algebraica de la recta.

$$m = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

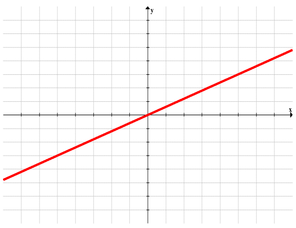
$$y = 1{,}5 \cdot x$$

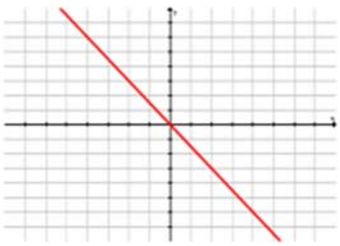
En aquests exemples, la recta sempre puja, és a dir, la funció és creixent. Què ocorre si la recta fóra decreixent? Per a no equivocar-nos amb els càlculs, sempre avaluem la funció d'esquerra a dreta, és a dir, el primer punt estarà més a l'esquerra, serà més xicotet.

Açò és així perquè el pendent mesura la quantitat de creixement (o decreixement) segons la funció va augmentant o el que és el mateix, avançant.

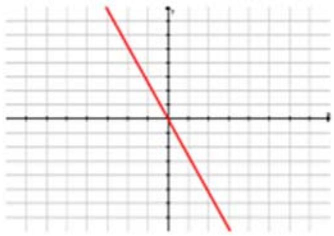
Activitats proposades

4. Troba el pendent i l'expressió algebraica de les següents rectes:

a. 



b.

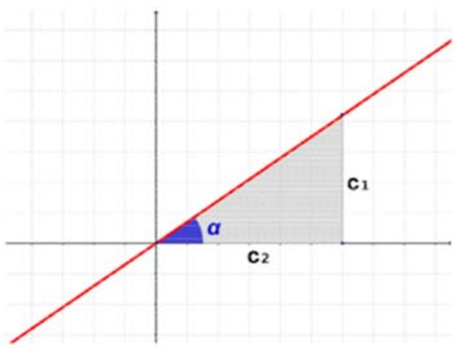


c.

Una altra expressió de la pendent

Per a trobar el pendent es pren com a referència la base i l'altura del triangle rectangle que formen els vèrtexs dels punts de la recta.

El quocient entre l'altura i la base és el pendent. Com el triangle construït és un triangle rectangle, el pendent és el quocient entre els seus dos catets, o el que és el mateix, el pendent és la tangent de l'angle que forma la recta amb l'eix horitzontal.



$$tan\alpha = \frac{C_{oposat}}{C_{contigu}} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow m = tan\alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

El pendent és la tangent de l'angle que forma la recta amb l'eix d'abscisses, és a dir, la recta amb l'horitzontal.

1.4. Rectes de la forma $y = m \cdot x + n$

Tornem a la situació 1 al principi del capítol. En aqueix cas, volíem trobar l'espai que recorria el ciclista. Ara suposem que el ciclista, abans de començar amb la seua ruta, s'ha hagut de desplaçar 2 Km fins a l'inici del seu camí.

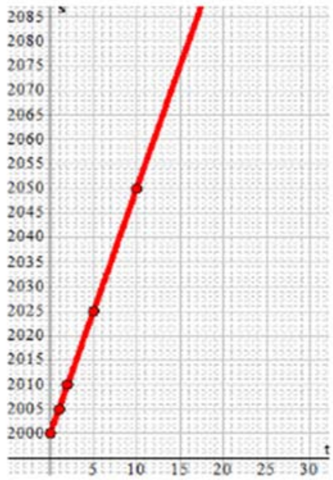
Activitats resoltes

0. *Situació 1.2:* la gràfica s-t d'un moviment rectilini uniforme: l'espai recorregut, en funció del temps, per un ciclista que s'ha traslladat 2 Km abans de començar el recorregut i es desplaça amb una velocitat de 5 m/s.

En aquest cas, la fórmula del MRU, com tenim un espai inicial, és $s = s_0 + v \cdot t$. Amb les dades de l'exercici, l'expressió queda $s = 2 + 5 \cdot t$.

Construïm la nova taula i dibuixem la gràfica:

Temps (t)	Espai (s)
0	2000
1	2007
2	2012
5	2027
10	2052



Podem observar que hem hagut d'adaptar els eixos per a poder pintar gràfica, ja que la recta s'ha desplaçat 2.000 posicions en l'eix y.

La gràfica d'aquesta recta té com a expressió algebraica $y=5 \cdot x+2000$ on x correspon al temps t i y a l'espai s, i 2.000 és l'espai inicial s_0.

En ambdós cas, el de la situació 1 i aquesta nova situació, el pendent d'ambdós rectes és 5. Açò és així ja que es tracta de la mateixa recta però desplaçada 2.000 posicions en l'eix d'abscisses, és a dir, les dues rectes són paral·leles.

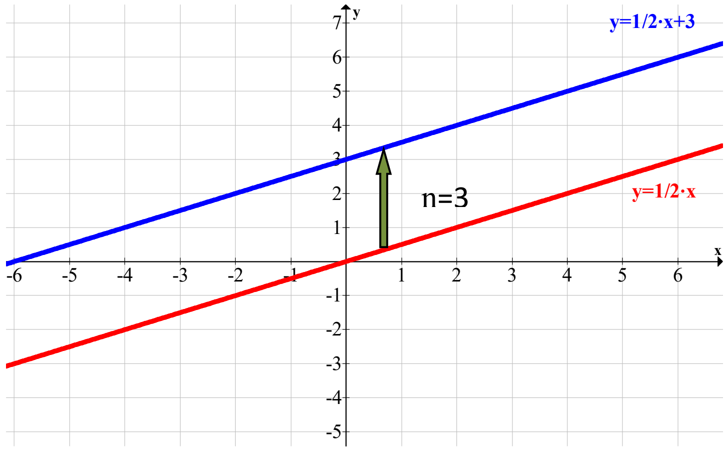
Les rectes de la forma $y=m \cdot x+n$ tenen el mateix pendent que les rectes $y=m \cdot x$ però es desplacen en l'eix d'abscisses (eix y) n posicions. Per aquesta raó, a n se l'anomena **ordenada a l'origen**, ja que és el valor de la recta al punt de partida, és a dir, quan $x=0$.

Exemple:

12. Comparem la recta $y = 1/2 \cdot x$ amb la recta $y = 1/2 \cdot x + 3$

Les dues rectes tenen la mateixa forma, és a dir, la mateixa inclinació o el mateix pendent. En ambdós casos $m = 1/2$. Són dues rectes paral·leles.

La diferència està al valor de la n: la recta $y = 1/2 \cdot x$ (on $n=0$) s'ha desplaçat 3 posicions a l'eix y, per a convertir-se en la recta $y = 1/2 \cdot x + 3$ (on $n=3$)

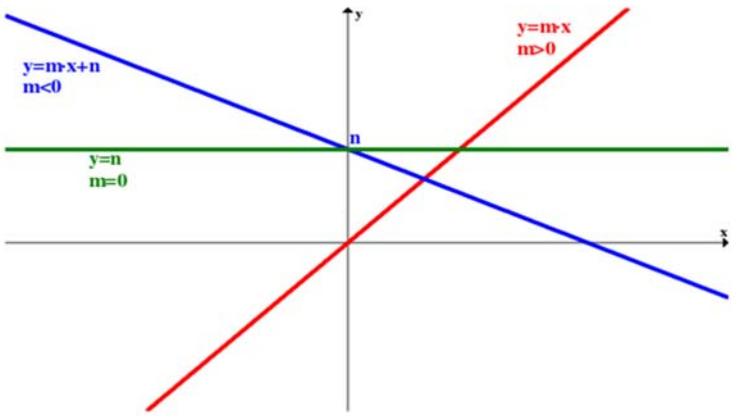


Les funcions polinòmiques de primer grau, o funcions lineals, es descriuen algebraicament de la forma $y = m \cdot x + n$ i es representen mitjançant rectes.

A més de la variable independent x, la variable dependent y, i el pendent m, s'afig el valor n que és l'ordenada en l'origen.

La recta $y=m \cdot x+n$ és paral·lela a la recta $y=m \cdot x$ (tenen el mateix pendent, m) desplaçada verticalment n posicions. Per aquesta raó, el creixement o decreixement d'aquestes funcions es comporten de la mateixa manera:

- Si $m>0$, la funció és **creixent**.
- Si $m<0$, la funció és **decreixent**.
- Si $m=0$, la funció és **constant**, ni creix ni decreix. És paral·lela a l'eix x, i passa pel punt $y=n$.



Les funcions $y=m \cdot x$ e $y=m \cdot x+n$ se les anomena **funcions lineals**, encara que a les segones també se les anomena **funcions afins**.

Activitats proposades

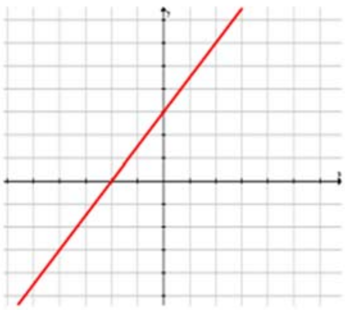
5. Representa les següents funcions lineals:

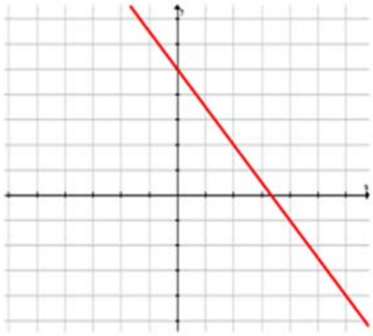
a) $y = 3 \cdot x + 4$ b) $y = -\frac{3}{7} \cdot x - 2$ c) $2x + 4y = 5$

d) $y = 5$ *e)* $y = 0$ *f)* $x = 3$

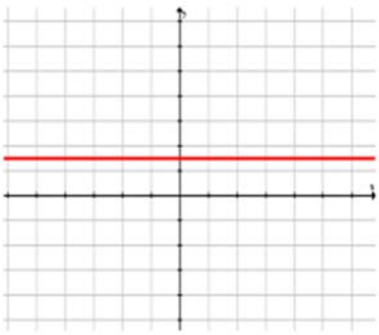
6. Troba l'expressió de les següents rectes:

a.



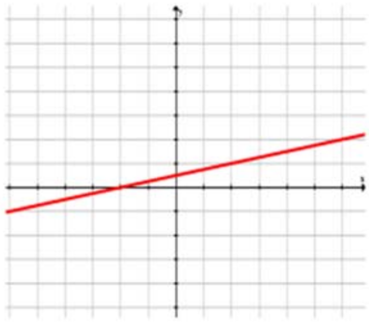


b.



c.

d.



2. FUNCIONS POLINÒMIQUES DE SEGON GRAU

2.1. Funcions polinòmiques de segon grau. Paràbola $y = a \cdot x^2$

A l’apartat anterior hem representat les gràfiques de les funcions polinòmiques de primer grau. Ara, estudiarem la representació de les funcions polinòmiques de segon grau. La gràfica d’aquest tipus de funcions serà semblant a la representació de la situació *2* al principi del capítol.

Les funcions polinòmiques de segon grau són aquelles que tenen com a expressió algebraica un polinomi de grau 2, és a dir, la seua expressió és de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

Es representen mitjançant **paràboles.**

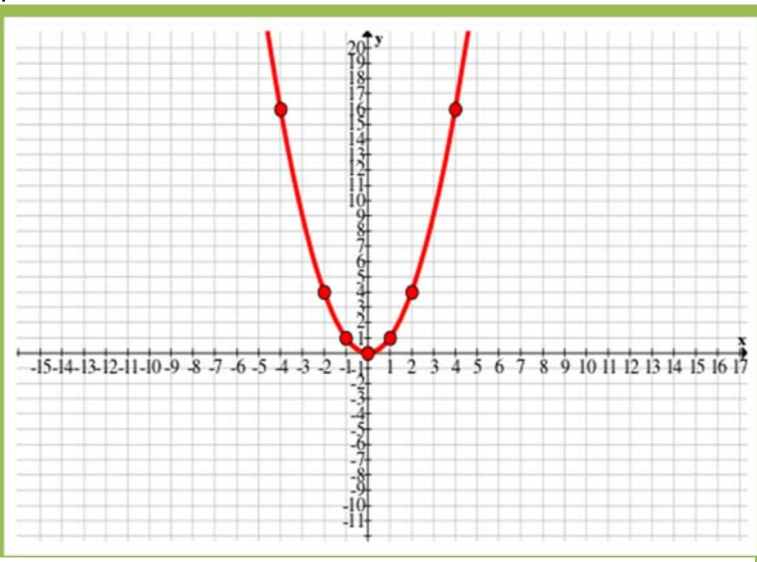
Exemple:

0. La representació de la situació 2 és una paràbola.

- En Física, la trajectòria de molts moviments es representen mitjançant paràboles, i per això rep el nom de tir parabòlic: llançar un projectil amb un cert angle, l’aterratge d’un avió a un portaavions, etc.

Paràbola $y = a \cdot x^2$

Representarem la paràbola $y = x^2$. Per a això, construïm una taula de valors i representem els parells de punts al pla cartesià.



x	***y***
–10	100
–5	25
–2	4
–1	1
0	0
1	1
2	4
5	25
10	100

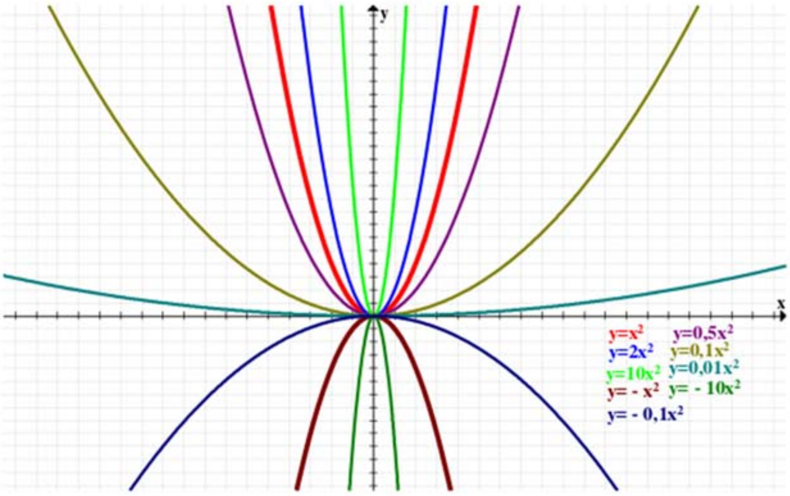
A la taula i a la gràfica es poden observar algunes característiques:

- El domini i el recorregut són tots els reals.
- La funció és contínua, perquè no presenta salts.
- És simètrica respecte a l'eix y, és a dir, és una funció parella:

$$y = f(x) = x^2 \quad , \quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- És decreixent fins al 0, i després creixent, per tant té un mínim absolut al (0, 0).

En aquest cas, $a = 1$, i sabem que si $a = -1$, la paràbola té la mateixa forma però està oberta cap avall, i en compte d'un mínim, té un màxim al (0, 0).



Vegem el que succeeix quan augmentem o disminuïm el coeficient a:

- Si $a > 0$:
  a. en augmentar a, la paràbola es fa més estreta, i es va acostant a l'eix y.
  b. en disminuir a, la paràbola es fa més ampla (plana), i es va acostant a l'eix x.
- Si $a < 0$:
  c. en augmentar a, la paràbola es fa més ampla (plana), i es va acostant a l'eix x.
  d. en disminuir a, la paràbola es fa més estreta i es va acostant a l'eix y.

En general, les paràboles l'expressió algebraica de les quals és $y = a \cdot x^2$, tenen les següents característiques:

-són **contínues** en tot el domini

-el domini i el recorregut són tots els reals

-si $a > 0$, la paràbola està oberta cap amunt i té un **mínim absolut** al punt (0, 0)

-si $a < 0$, la paràbola està oberta cap avall i té un **màxim absolut** al punt (0, 0)

A aquest punt se l'anomena vèrtex de la paràbola

-són funcions parelles, és a dir, simètriques respecte a l'eix y.

Activitats proposades

7. A partir de la paràbola $y = x^2$, dibuixa la gràfica de les paràboles següents:

a) $y = \frac{5}{3}x^2$ b) $y = -3x^2$ c) $y = -\frac{15}{3}x^2$

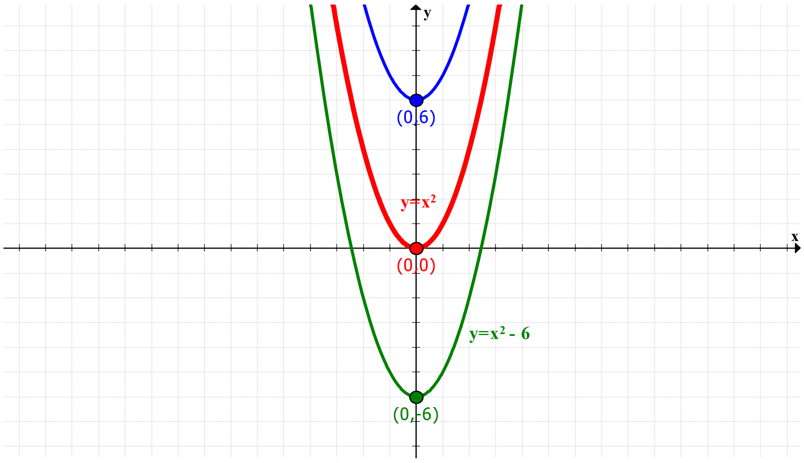
d) $y = 4{,}12x^2$ e) $y = -\frac{6}{10}x^2$ f) $y = \frac{7}{8}x^2$

2.3. Translacions al pla

Utilitzant com a plantilla la gràfica de $y=x^2$, es poden obtindre les gràfiques d'altres paràboles més complexes, depenent del tipus de desplaçament que utilitzem.

Desplaçaments verticals: translacions en la direcció de l'eix y: $y = x^2 + k$.

En aquest cas, es tracta de moure la paràbola en direcció vertical, és a dir, cap amunt o cap avall. Comparem les paràboles $y=x^2+6$ i $y=x^2-6$ amb la nostra plantilla:



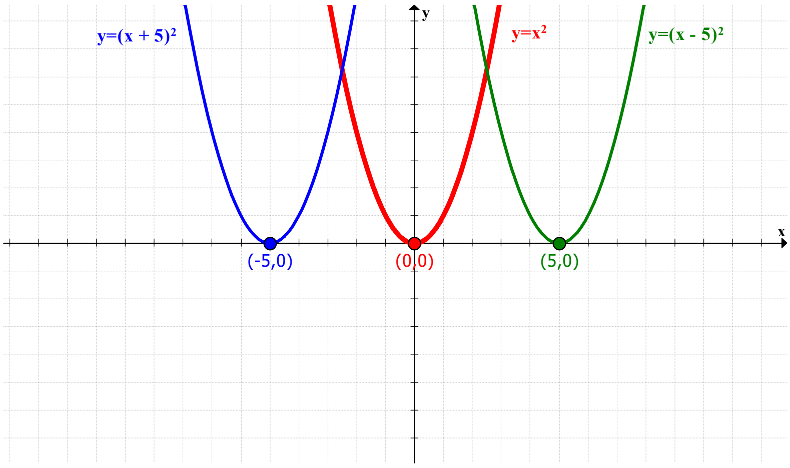
Es pot observar, que en sumar 6 a la paràbola x^2, la gràfica és idèntica però desplaçada 6 unitats en sentit positiu a l'eix y, és a dir, la paràbola ha pujat 6 unitats. El nou vèrtex passa a ser el punt (0, 6). Quelcom paregut ocorre quan es resta 6 unitats a x^2. En aquest cas la gràfica s'ha desplaçat 6 unitats en sentit negatiu fins al vèrtex (0,-6), és a dir, baixa 6 unitats.

En general, la paràbola $y=x^2+k$ té la mateixa gràfica que $y=x^2$ però traslladada k unitats verticalment en l'eix y. Si k és positiu, la translació és cap amunt i si k és negatiu, cap avall.

El **vèrtex** de la paràbola se situa al punt (0, k).

Desplaçaments horitzontals: translacions en la direcció de l'eix x: $y = (x - q)^2$.

Ara traslladem la paràbola en direcció horitzontal. Cap a la dreta o cap a l'esquerra. Comparem les paràboles $y=(x+5)^2$ i $y=(x-5)^2$ amb la plantilla:

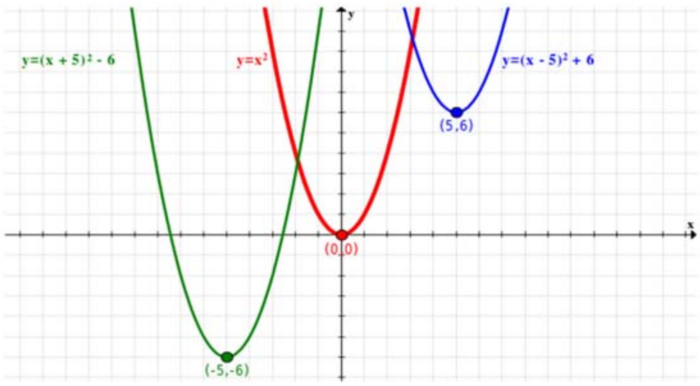


En aquest cas, en augmentar la variable que s'eleva al quadrat, és a dir, sumar 5 unitats, la gràfica es trasllada horitzontalment cap a l'esquerra 5 unitats, sent el nou vèrtex el punt (-5,0). En disminuir la dita variable, és a dir, restar 5 unitats, la paràbola es desplaça cap a la dreta sent el nou vèrtex el punt (5, 0).

En general, la paràbola $y = (x - q)^2$té la mateixa gràfica que$y = x^2$ traslladada $\boldsymbol{q}$ unitats en l'eix x cap a la dreta si $q > 0$ i cap a l'esquerra si $q < 0$.
El **vèrtex** de la paràbola se situa al punt $(q,0)$**.**

Desplaçaments oblics: translacions en ambdós eixos: $y = (x - q)^2 + k$.

L'últim moviment és el que combina els dos anteriors, és a dir, movem la plantilla k posicions de manera vertical i q posicions de manera horitzontal, resultant un moviment oblic al pla. Comparem la paràbola $y=(x-5)^2+6$ i $y=(x+5)^2-6$ amb la plantilla $y=x^2$.



La paràbola $y = (x - 5)^2 + 6$es trasllada 5 unitats a la dreta i 6 unitats cap amunt, mentres que la paràbola$y = (x + 5)^2 - 6$ es trasllada 5 unitats cap a l'esquerra i 6 unitats cap avall.
És a dir, és la combinació dels dos moviments anteriors.

En general, la paràbola $y = (x - q)^2 + k$té la mateixa gràfica que$y = x^2$ traslladada de la manera següent:

$$q unitats\begin{cases} capaladretasiq > 0 \\ capal'esquerrasiq < 0 \end{cases}; kunitats\begin{cases} capamuntsik > 0 \\ capavallsik < 0 \end{cases}$$

El **vèrtex** de la paràbola se situa al punt(q, k).

Representació de paràboles de la forma $y = x^2 + r \cdot x + s$

Sabem representar les paràboles de la forma $y = (x - q)^2 + k$ mitjançant translacions. Com podem pintar la gràfica de les paràboles l'expressió algebraica de la qual és $y = x^2 + r \cdot x + s$? N'hi ha prou amb convertir aqueixa expressió en una la funció de la qual sapiem representar:

Activitats resoltes

0. Representa la gràfica de la funció quadràtica $y = x^2 + 6 \cdot x - 4$

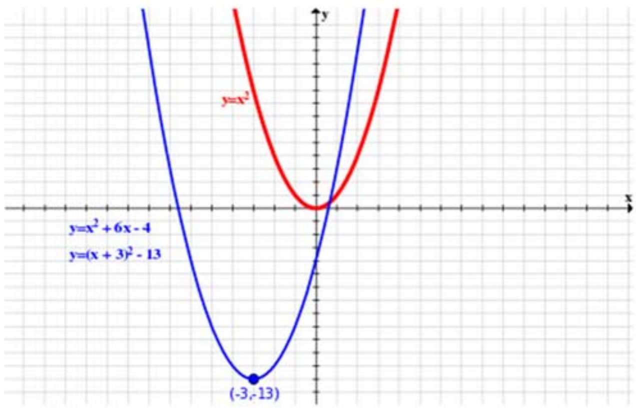
La funció ve donada de la forma $y = x^2 + r \cdot x + s$, i volem convertir-la en $y = (x - q)^2 + k$

$$y = x^2 + r \cdot x + s \Leftrightarrow y = (x - q)^2 + k$$

Sabem que $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$, on ja ens apareix $x^2 + 6x$. Ara hem d'ajustar la resta:

$$y = x^2 + 6x - 4 = (x + 3)^2 + K = x^2 + 6x + 9 + K \Rightarrow K = -13 \Rightarrow \boxed{y = (x + 3)^2 - 13}$$

Amb la paràbola expressada d'aquesta manera, n'hi ha prou amb traslladar la gràfica de $y = x^2$ 3 unitats a l'esquerra i 13 unitats cap avall, sent el vèrtex el punt (–3, –13).



En general, el vèrtex de la paràbola es troba al punt $x = \frac{-r}{2}$. L'altra coordenada s'obté substituint x a l'expressió de la funció.

Exemple:

13. Al cas anterior, $y = x^2 + 6 \cdot x - 4$, el vèrtex està al punt (–3, –13).

Com a r = 6, la primera coordenada del vèrtex és $x = \frac{-r}{2} = \frac{-6}{2} = -3$. Substituint el valor a l'expressió: $y = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 4 = 9 - 18 - 4 = -13$

Activitats proposades

8. Representa la gràfica de les següents paràboles i localitza el vèrtex:

a) $y = (x + 4)^2 - 5$ b) $y = -(x - \frac{4}{5})^2 + 6$ c) $y = x^2 - 5$

d) $y = x^2 - 6x + 16$ e) $y = x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ f) $y = -x^2 + 12x - 26$

g) $y = x^2 - 10x + 17$ h) $y = -x^2 + 2x - 4$ i) $y = -x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

2.3. Funció quadràtica. Paràboles de la forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

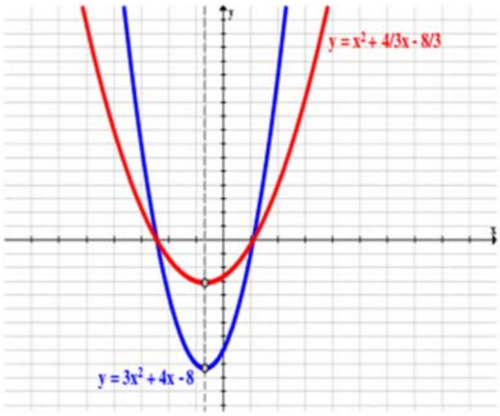
Les funcions polinòmiques de segon grau reben el nom de **funcions quadràtiques**.

Fins ara només hem estudiat les funcions de tipus $y = x^2 + rx + s$, que és una paràbola oberta cap amunt, o $y = -x^2 + rx + s$, oberta cap avall.

Sabem com afecta el valor del coeficient a a la gràfica de la paràbola $y = a \cdot x^2$, fent-la més estreta o més ampla.

Per a representar les funcions quadràtiques $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ es converteix la dita expressió en una més familiar que sabem representar: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = y = a \cdot (x^2 + r \cdot x + s)$

Activitats resoltes



0. Representa la paràbola $y = 3x^2 + 4x - 8$:

Convertim la funció en una expressió més fàcil de representar: $y = 3x^2 + 4x - 8 = 3 \cdot (x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3})$

i la comparem amb $x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$.

$$x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} = (x + \frac{4}{6})^2 - \frac{20}{9}$$

Les dues paràboles tenen el vèrtex en el mateix punt d'abscissa, i la coordenada y queda multiplicada per 3.

Pel que respecta a la forma, la paràbola és més estreta, com es pot veure al punt 2.1.

En general, la representació de la funció quadràtica $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ es pot aproximar representant la paràbola $y = x^2 + rx + s$, tenint el vèrtex al mateix punt d'abscissa i la forma dependrà del valor absolut del coeficient a, sent més ampla per a valors grans més estreta per a valors més xicotets. L'orientació de la paràbola serà :

-cap amunt si $a > 0$

-cap avall si $a < 0$

Elements de la paràbola

Els elements més característics de la paràbola ajuden a representar la seua gràfica al pla cartesià.

Coeficient a:

Si $a > 0$ la paràbola està oberta cap amunt.

Si $a < 0$ la paràbola està oberta cap avall.

Vèrtex:

El **vèrtex** de la paràbola està al punt $(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a})$:

Havíem vist que per a la paràbola de la forma $y = x^2 + rx + s$, la primera coordenada és $\frac{-r}{2}$.

La paràbola al cas general és $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=a\cdot(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a})=a\cdot(x^2+r\cdot x+s)$, és a dir, $r=\frac{b}{a}$, llavors la primera coordenada del vèrtex és $\frac{-r}{2}=\frac{\frac{-b}{a}}{2}=\frac{-b}{2a}$.

La segona coordenada ix en substituir $x=\frac{-b}{2a}$ a la funció quadràtica.

<u>Punts de tall amb l'eix OX</u>:

Són els punts on la paràbola talla a l'eix x, és a dir, és la intersecció de la paràbola amb la recta $y=0$. Indica quan la paràbola és positiva o negativa.

Per a calcular-los, es resol l'equació de segon grau $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$.

<u>Punt de tall amb l'eix OY</u>:

És el punt on la paràbola talla a l'eix y, és a dir, és la intersecció de la paràbola amb la recta $x = 0$.

Quan $x=0$ la paràbola pren el valor de c, després el punt de tall és el punt $(0,c)$.

<u>Eix de simetria</u>:

La paràbola és simètrica en la recta paral·lela a l'eix y que passa pel vèrtex de la paràbola, és a dir, **l'eix de simetria** de la paràbola és la recta $x=\frac{-b}{2a}$.

L'eix de simetria també passa pel punt mitjà del segment format pels dos punts de tall amb l'eix x.

A partir d'aquests elements, es pot representar la gràfica d'una funció quadràtica.

Activitats resoltes

14. Determina els elements de la paràbola $y=-2x^2-12x-10$

a. $a=-2$, llavors la paràbola està oberta cap avall.

b. Vèrtex: $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{-b}{2a}=\frac{12}{2\cdot(-2)}=\frac{-12}{4}=-3 \\ y=-2\cdot(-3)^2-12\cdot(-3)-10=-18+36-10=8 \end{array}\right. \Rightarrow Vèrtex: V(-3{,}8)$

c. Punts de tall:

i. Eix OX: $y=-2x^2-12x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144-80}}{-4}=\left\{\begin{array}{l} x_1=-5\Rightarrow(-5,0) \\ x_2=-1\Rightarrow(-1,0) \end{array}\right.$

ii. Eix OY: $\left\{\begin{array}{l} y=-2x^2-12x-10 \\ x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y=-2\cdot 0^2-12\cdot 0-10=-10\Rightarrow(0,-10)$

La paràbola també passa pel seu simètric: $(-6,-10)$.

d. Eix de simetria: recta $x=-3$.

Activitats proposades

9. Troba els elements característics i representa les paràboles següents:

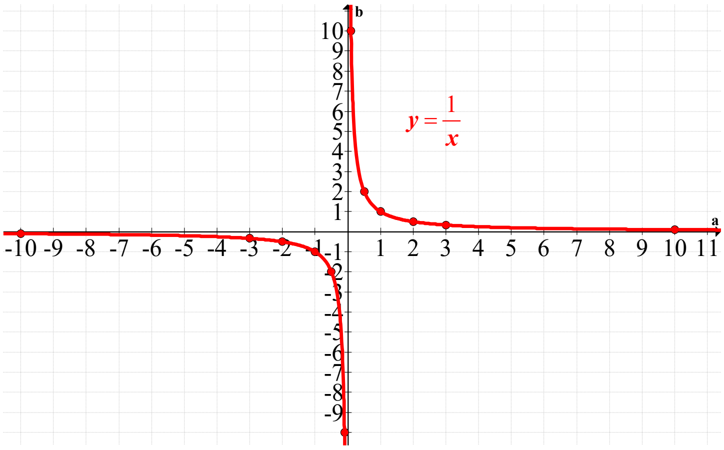
a) $y = 2x^2 + 4x - 6$ b) $y = 6x^2 - 24x$ c) $y = -2x^2 + 4x - 2$

d) $y = 2x^2 + 5x - 12$ e) $y = 3x^2 + 6x - 9$ f) $y = -2x^2 + 7x + 3$

g) $y = 7x^2 + 21x - 28$ h) $y = 5x^2 - 9x + 4$ i) $y = -4x^2 - 4x - 1$

3. FUNCIONS DE PROPORCIONALITAT INVERSA

3.1. Funció de proporcionalitat inversa $y = \frac{k}{x}$



Dues magnituds són **inversament proporcionals** quan en multiplicar o dividir a la primera per un nombre, la segona queda dividida o multiplicada pel mateix nombre. La **raó de proporcionalitat inversa** *k* és el producte de cada parell de magnituds: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

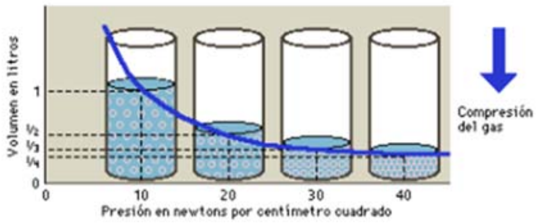
Exemple

0. Es pot comprovar a la situació *3* a l'inici del capítol, que la velocitat i el temps són magnituds inversament proporcionals. En aquest cas, l'espai es manté constant, sent la raó de proporcionalitat inversa $s = v \cdot t$.

15. En Física trobem molts exemples de magnituds inversament proporcionals: la densitat i el volum, la potència i el temps, la pressió i la superfície,…

Activitats resoltes

16. Representa al pla la llei de Boyle-Mariotte: "a temperatura constant, el volum d'una massa fixa de gas és inversament proporcional a la pressió que aquest exerceix."



La fórmula que descriu aquesta llei és$P \cdot V = k$

Si aïllem el volum final V, obtenim l'expressió següent: $V = \frac{k}{P}$.

La gràfica descriu una corba que a mesura que augmenta la pressió inicial, disminueix el volum i es va aproximant a l'eix x, i al contrari, si disminueix la pressió, el volum que ocupa el gas és major.

La funció de proporcionalitat inversa es defineix mitjançant l'expressió $y = \frac{k}{x}$, on k és la raó de proporcionalitat inversa i les variables x e y són els distints valors que tenen les dues magnituds.
La seua representació gràfica en el pla cartesià és una **hipèrbola**.

Exemple

17. Representa la hipèrbola $y = \frac{1}{x}$

Donem una taula de valors i representem els punts al pla:

x	–3	–2	–1	–1/2	–1/10	1/10	1/2	1	2	3
y=1/x	–1/3	–1/2	–1	–2	–10	10	2	1	1/2	1/3

Es pot observar que la gràfica mai talla als eixos de coordenades, ja que el 0 no pertany al domini i tampoc al recorregut de la funció.

És fàcil comprovar que la funció és simètrica respecte a l'origen, i contínua a tot el domini, és a dir, en $\Re - \{0\}$.

La hipèrbola $y = \frac{k}{x}$

Activitats proposades

10. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa al mateix sistema de coordenades:

a) $y = \frac{-1}{x}$ b) $y = \frac{5}{x}$ c) $y = \frac{1}{2x}$

d) $y = \frac{3}{8x}$ e) $y = \frac{-5}{3x}$ f) $y = \frac{-12}{5x}$

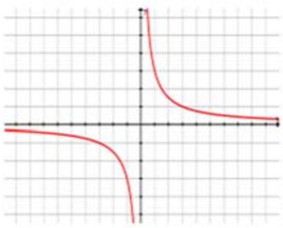
11. Descriu el que succeeix quan varia el valor de k. Ajuda't de les gràfiques de l'exercici anterior.

12. Troba l'expressió analítica i representa la gràfica de les hipèrboles que passa per cada un d'aquests punts. Escriu els intervals on la funció és creixent o decreixent.

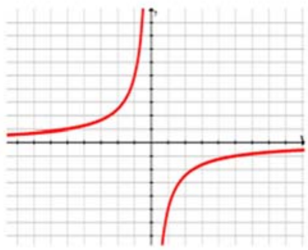
a) $(4,2)$ b) $(3,-1)$ c) $(1/3\,,5)$

d) $(12,3)$ e) $(a,1)$ f) $(1,b)$

13. Troba el domini, recorregut, continuïtat, màxims i mínims i el creixement de les hipèrboles següents:



a)



b)

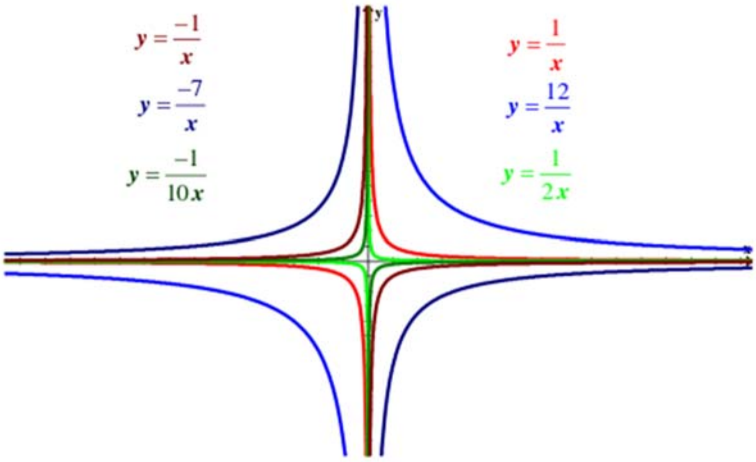
14. Troba el domini, recorregut, continuïtat, màxims i mínims i el creixement de les hipèrboles següents:

a. $y = \frac{9}{2x}$ b. $y = \frac{-5}{3x}$ c. $y = \frac{-0,3}{x}$

d. $(-5,2)$ e. $(4,-9)$ f. $(1,1/2)$

En general, les hipèrboles l'expressió de les quals és $y = \frac{k}{x}$ tenen les propietats següents:

- $|\boldsymbol{k}|$:
  a. Si el valor absolut de k augmenta, la corba s'allunya de l'origen de coordenades.
  b. Si el valor absolut de k disminueix, la corba s'aproxima a l'origen de coordenades.
- **Domini:** són tots els reals menys el 0: $\Re - \{0\}$
- **Recorregut:** el seu recorregut són tots els reals menys el 0: $\Re - \{0\}$
- **Continuïtat:** la funció de proporcionalitat inversa és contínua en tot el seu domini, però discontínua a la recta real, ja que el 0 no està al domini, i per tant, hi ha un bot.
- **Simetria:** són funcions imparelles, açò és, són simètriques respecte a l'origen de coordenades.
- **Asímptotes:** Quan els valors de x i els de y es fan molt grans, la corba s'aproxima als eixos però sense tocar-los, per tant, els eixos de coordenades són les asímptotes de les funcions de



proporcionalitat inversa: les rectes$x = 0$ y$y = 0$.

- **Creixement:** depén del signe de k :
  - c. Si $k > 0$: la funció és **decreixent** a l'interval $(-\infty, 0)$i **creixent** a l'interval $(0, +\infty)$.
  - d. Si $k < 0$: la funció és **creixent** a l'interval $(-\infty, 0)$i **decreixent** a l'interval$(0, +\infty)$.

Les asímptotes divideixen a la hipèrbola en dues corbes, que reben el nom de **branques de la hipèrbola**.

3.2. La hipèrbola $y = \frac{k}{x-a} + b$

A partir de la representació de la funció $y = \frac{k}{x}$, és possible representar un altre tipus d'hipèrboles? Igual que ocorre amb les paràboles, podem traslladar les hipèrboles al pla en direcció horitzontal o vertical, segons els valors que prenguen els paràmetres a i b.

Activitats proposades

15. Representa en els mateixos eixos de coordenades, les hipèrboles següents:

a) $y = \frac{5}{x}$ $\quad y = \frac{5}{x} + 3$ $\quad y = \frac{5}{x} - 3$

b) $y = \frac{-12}{x}$ $\quad y = \frac{-12}{x-3}$ $\quad y = \frac{-12}{x+3}$

c) $y = \frac{3}{x}$ $\quad y = \frac{3}{x-1} + 5$ $\quad y = \frac{5x-2}{x-1}$

16. Descriu el que succeeix quan varien els paràmetres a i b a les hipèrboles de l'exercici anterior.

En general, la representació gràfica de les hipèrboles l'expressió algebraica de la qual és$y = \frac{k}{x-b} + a$ és una translació al pla depenent dels valors de a i b .

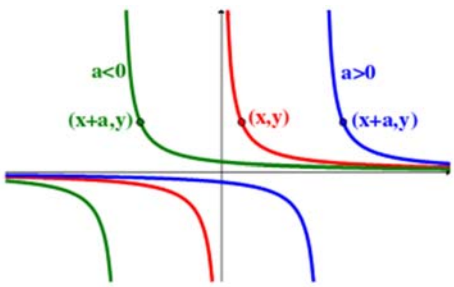
Desplaçaments horitzontals

En variar el valor de $\boldsymbol{a}$, la representació gràfica de la hipèrbola es desplaça horitzontalment a unitats:

- Si $\boldsymbol{a>0}$: la hipèrbola es desplaça cap a la dreta.
- Si $\boldsymbol{a<0}$:la hipèrbola es desplaça cap a l'esquerra.
- El punt (x, y)es converteix en el punt $(x + a, y)$:

$$(x, y) \rightarrow (x + a, y)$$

- El vector de translació és el vector $(a, 0)$



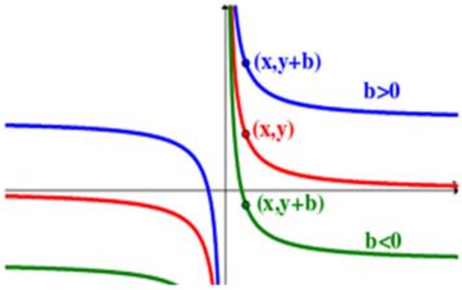
Desplaçaments verticals

En variar el valor de $\boldsymbol{b}$, la representació gràfica de la hipèrbola es desplaça verticalment b unitats:

- Si $b>0$: la hipèrbola es desplaça cap amunt.
- Si $b<0$: la hipèrbola es desplaça cap avall.
- El punt (x, y)es converteix en el punt$(x, y+b)$:

$$(x, y) \rightarrow (x, y+b)$$

- El vector de translació és el vector $(0, b)$



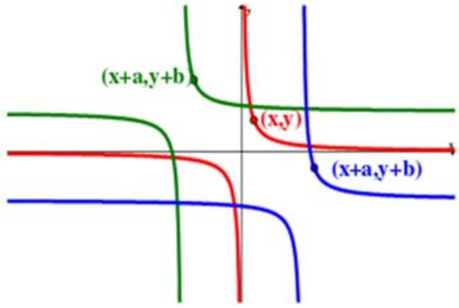
Desplaçaments oblics

En variar tant el valor de a com el valor de b , la representació gràfica de la hipèrbola es desplaça diagonalment tantes unitats com siga el valor dels paràmetres:

- Les direccions cap a on es trasllada dependrà dels signes de a i b.
- El punt (x, y)es converteix en el punt $(x+a, y+b)$:

$$(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$$

- El vector de translació és el vector (a, b)



Activitats proposades

17. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa a partir de la hipèrbola$y=\frac{5}{x}$:

a) $y=\frac{10}{x-5}+3$ b) $y=\frac{1}{x+4}+8$ c)$y=\frac{100}{x+10}+1$

d) $y=\frac{10}{2x-4}-7$ e) $y=6-\frac{4}{x}$ f) $y=\frac{20}{5-x}-2$

18. Estudia el domini, recorregut, continuïtat, simetria, asímptotes i creixement de les funcions de proporcionalitat inversa de l'exercici anterior.

19. Escriu una regla per a expressar com es traslladen les asímptotes segons els paràmetres a i b.

Hipèrbola $y=\frac{mx+n}{px+q}$

Les funcions que es defineixen mitjançant aquesta expressió també són funcions de proporcionalitat inversa i es representen mitjançant hipèrboles. Per a això, necessitem fer el canvi en una expressió com l'estudiada a l'apartat anterior que ens resulte més fàcil de manejar i representar:

$$y=\frac{mx+n}{px+q} \rightarrow \text{Dividint } (mx+n):(px+q) \rightarrow y=\frac{k}{x-a}+b$$

Activitats resoltes

0. Convertir la funció$y=\frac{3x+2}{x-7}$en una funció l'expressió de la qual siga més senzilla de representar.

Dividim 3x+2 entre x-7 :

$$(3x+2)=3(x-7)+23 \Leftrightarrow \frac{(3x+2)}{(x-7)}=\frac{3(x-7)}{(x-7)}+\frac{23}{(x-7)}=\frac{23}{(x-7)}+3$$

Aquesta última expressió és fàcil de representar.

Activitats proposades

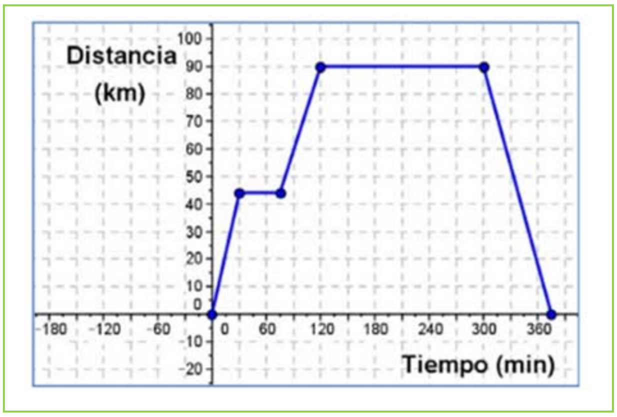
20. Representa les hipèrboles següents:

a) $y=\frac{2x-4}{x+5}$b) $y=\frac{3-5x}{x+2}$c)$y=\frac{4x-12}{x-3}$ d) $y=\frac{6x+8}{1-x}$e) $y=\frac{7x+5}{x-4}$f) $y=\frac{6x+10}{2x-1}$

4. FUNCIONS DEFINIDES A TROSSOS

Hi ha gràfiques que no podem representar amb una única fórmula, com la del marge:

Activitats resoltes



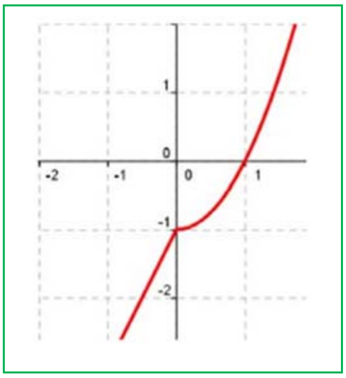
- *La gràfica del marge representa una excursió amb autobús d'un grup de 1º d'E.S.O. a Toledo, passant per Aranjuez. Busca una expressió que la represente.*

Aquest tipus de funció es denomina **funció definida a trossos** perquè cada tros té una expressió algebraica diferent. Observa que està formada per 5 trams de rectes, distints. Podem calcular les seues equacions perquè coneixem els punts pels quals passen: ((0,0), (30,45), (75, 45), (90, 120), (90, 300) y (0, 360).

La seua expressió és:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}x & si\ 0\le x\le 30 \\ 45 & si\ 30<x\le 75 \\ 5x-330 & si\ 75<x\le 120 \\ 90 & si\ 120<x\le 300 \\ -\frac{3}{2}x+360 & si\ 300<x\le 360 \end{cases}$$

- *Representa gràficament la funció* $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ x<0 \\ x^2-1 & si\ x>0 \end{cases}$.



Està definida de distinta manera abans de 0, que és una recta, que després de 0, que és una paràbola. Simplement dibuixem aquestes funcions als intervals indicats.

Activitats proposades

21. Representa gràficament la funció $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ x<0 \\ x-1 & si\ x>0 \end{cases}$.

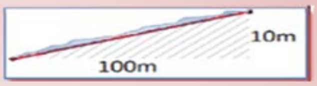
22. Representa gràficament la funció $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si\ x<0 \\ 2x+2 & si\ x>0 \end{cases}$.

23. Representa gràficament la funció $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & si\ x<1 \\ x+3 & si\ x>1 \end{cases}$.

CURIOSITATS. REVISTA

Coneixes aquest senyal?

Segurament l'has vist en alguna carretera, però què indica? Mesura el pendent de la carretera respecte a l'horitzontal i significa que el pendent és del 10 %, és a dir, $\frac{10}{100}$. Vol dir que pugem 10 metres d'altura mentres que avancem 100 metres.



Busca en internet el perfil del *L'Angliru* i comprova el pendent de les seues rampes.

Arquimedes i el raig de calor

Arquimedes és un dels personatges que més han aportat a la ciència en la història. Aquest enginyer, físic, inventor, astrònom i matemàtic va nàixer a Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.) i és el responsable molts teoremes i invencions que segurament hauràs sentit, com el famós principi d'Arquimedes, o el caragol d'Arquimedes utilitzat en les cadenes de producció de moltes empreses.

Quan els romans van atacar Siracusa, compte la llegenda que Arquimedes va construir un sistema que concentrava els rajos de sol en un raig de calor que va provocar l'incendi dels vaixells enemics. Aquest sistema estava compost per espills (o escuts ben polits) col·locats de tal forma que dibuixaren una superfície parabòlica.

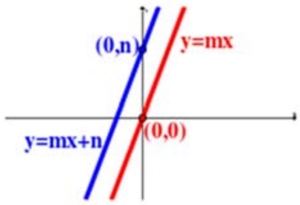
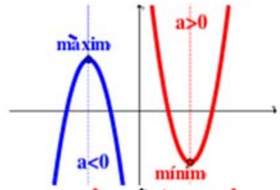
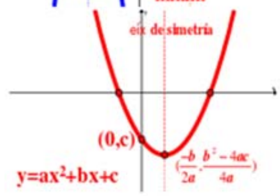
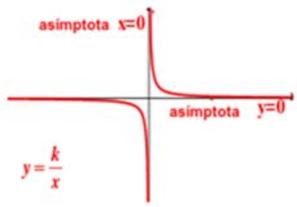
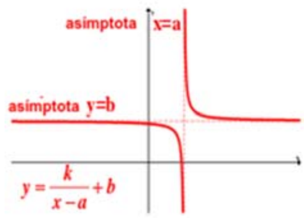
Mite o realitat? No se sap, però a l'actualitat, aquest sistema és la base del funcionament dels forns solars.

Apol·loni de Pergue

Hem estat parlant de paràboles i hipèrboles, però, d'on vénen aqueixes paraules i formes? El nom d'aquestes corbes li'l devem a Apol·loni de Pergue (262 a.C.- 190 a.C.) que va estudiar aquest tipus de funcions a la seua obra *Les Còniques*. Les corbes sorgeixen dels talls d'un con: depenent l'angle de tall, obtenim unes corbes o altres. És com tallar una barra de pa.

Textos Marea Verde

RESUM

		Exemples
Funció polinòmica de primer grau: Rectes $y=m\cdot x$ $y=m\cdot x+n$	La seua expressió són polinomis de grau u. Es representen mitjançant **rectes**: Hi ha dos tipus: - **Funcions lineals o de proporcionalitat directa**: $y=m\cdot x$, passen per l'origen de coordenades. - **Funcions afins**:$y=m\cdot x+n$, són translacions a l'eix y, n unitats. Passen pel punt (0,n).	
Funció polinòmica de segon grau: Paràboles $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$	La seua expressió són polinomis de grau dos. Es representen mitjançant **paràboles**: **Vèrtex:** $(\frac{-b}{2a},\frac{b^2-4ac}{4a})$ **Punts de tall amb l'eix OX:** $a\cdot x^2+b\cdot x+c=0$. **Punt de tall amb l'eix OY:** $x=0$, és el punt (0,c). **Eix de simetria**: és la recta $x=\frac{-b}{2a}$.	
Funció de proporcionalitat inversa: Hipèrboles $y=\frac{k}{x}$	$\lvert k\rvert$: allunya o acosta la corba a l'origen de coordenades. **Domini i recorregut:** són tots els nombres reals menys el 0. **Continuïtat:** contínua en tot el seu domini, discontínua en $x=0$. **Simetria:** imparell, simètriques respecte a l'origen de coordenades. **Asímptotes:** les rectes $x=0$ i $y=0$. **Creixement:** - Si $k>0$: **decreixent** en $(-\infty,0)$ i **creixent** en $(0,+\infty)$. - Si $k<0$: **creixent** en $(-\infty,0)$ i **decreixent** en $(0,+\infty)$.	
Hipèrboles $y=\frac{k}{x-a}+b$	Són el resultat de traslladar la hipèrbola $y=\frac{k}{x}$ pel vector de translació (a,b): - Domini: $\Re-\{a\}$ Recorregut: $\Re-\{b\}$ - Punts: $(x,y)\rightarrow(x+a,\ y+b)$ - Asímptotes: $\{x=0\rightarrow x=a\};\{y=0\rightarrow y=b\}$	

EXERCICIS I PROBLEMES

Funció lineal

1. Representa gràficament la següent relació de proporcionalitat donada a la següent taula i escriu la seua equació. Descriu quin tipus de relació és.

Magnitud A (a)	–5	–2	0	1	3
Magnitud B (b)	–15	–6	0	3	9

2. Representa les rectes a) $y = 5x$, b) $y = -5x$, c) $y = (1/2)x$, d) $y = 2'3x$.

3. Estudia el domini, màxims i mínims i simetries de les funcions lineals a) $y = 1'5x$, b) $y = -0'5x$.

4. Estudia la funció $y = 0{,}7x$ a l'interval [–2, 5].

5. Calcula el pendent de la recta que passa pels punts (1, 4) i (0, 0) i determina la seua expressió algebraica.

6. Representa les següents funcions lineals:

a) $y= 2x + 3$ b) $y = -x + 5$ c) $y = 3x - 2$ d) $y = -2x - 3$.

7. Calcula el pendent de la recta que passa pels punts (1, 4) i (2, 1) i determina la seua expressió algebraica.

8. Calcula el pendent de les rectes que passen pels punts que s'indiquen i determina la seua expressió algebraica.

a) (5, 1), (3, –2) b) (–3, 4), (4, –1) c) (1, 4), (0, 6) d) (–2, –4), (–1, 0)

9. Dues empreses de telefonia mòbil llancen les seues ofertes: l'empresa StarTel ofereix per cada telefonada pagar 50 cèntims més 2 cèntims per minut parlat; Tel-Hello ofereix 75 cèntims per telefonada i minuts il·limitats. Quina oferta és més econòmica? Per a donar la resposta, realitza els següents passos, expressant els resultats analíticament i gràficament:

a) Hi ha algun moment en què les dues ofertes siguen iguals?
b) Si parle una mitjana de 15 minuts al dia, quina oferta em convé?
c) Si parle una mitjana de 35 minuts al dia, quina oferta em convé?
d) Si faig una mitjana de 10 telefonades al dia de 3 minuts de duració, quina oferta em convé?
e) Si faig una mitjana de 2 telefonades al dia de 30 minuts de duració, quina oferta és la millor?
f) Quina oferta és més econòmica?

10. L'escriptor Jaime Joyce té distintes ofertes editorials per a publicar la seua última novel·la. L'editorial Vaig dolar li ofereix 100 €, a més del 20 % de cada llibre que venga; l'editorial Letrarte li ofereix 350 €; i l'editorial Paco li ofereix segons la venda de llibres: 50 € si ven fins a 250 llibres, 100 € si ven fins a 500 llibres, 300 € si ven fins a 1000 llibres i 500 € si ven més de 1000 llibres. Entre totes les editorials, quines creus que és millor oferta per a Jaime?

Funcions quadràtiques

11. A partir de la paràbola $y = x^2$, dibuixa la gràfica de les paràboles següents:

a) $y = x^2 + 3$ b) $y = -x^2 + 5$ c) $y = (x - 2)^2$ d) $y = (-x - 3)^2$.

12. A partir de la paràbola $y = x^2$, dibuixa la gràfica de les paràboles següents:

a) $y = 2{,}5x^2$ b) $y = -1{,}2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = -0{,}7x^2$.

13. Representa la gràfica de les funcions parabòliques següents i indica el vèrtex:

a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = (x - 2)^2 + 4$ d) $y = -x^2 + x - 3$.

14. Determina els elements de les paràboles següents

a) $y = 3x^2 + 2x + 5$ b) $y = -2x^2 + 4x - 1$ c) $y = 4(x - 2)^2 + 9$ d) $y = -5x^2 + 2x - 6$.

Funcions de proporcionalitat inversa

15. Troba l'expressió analítica i representa la gràfica de les hipèrboles $y = k/x$ que passen pels punts que s'indiquen. Escriu els intervals on la funció és creixent o decreixent.

a) (5, 1), b) (4, –1) c) (1, 4) d) (–2, –4).

16. Representa les següents funcions de proporcionalitat inversa:

a) $y = 2/x$ b) $y = -1/x$ c) $y = 3/x$ d) $y = -2/x$.

17. Determina el domini, recorregut, continuïtat, màxims i mínims i el creixement de les hipèrboles següents:

a) $y = 2'3/x$ b) $y = -1'7/x$ c) $y = 3'2/x$ d) $y = -2'1/x$.

18. Representa les hipèrboles següents:

a) $y = 2/x + 3$ b) $y = -1/x + 5$ c) $y = 3/x - 2$ d) $y = -2/x - 3$.

19. Representa les hipèrboles següents:

a) $y = 2/(x + 3)$ b) $y = -1/(x + 5)$ c) $y = 3/(x - 2)$ d) $y = -2/(x - 3)$.

20. Representa les hipèrboles següents:

a) $y = \frac{2x-3}{x+4}$ b) $y = \frac{-x-3}{2x+1}$ c) $y = \frac{2x-3}{3x-2}$ d) $y = \frac{x+2}{-x-3}$.

Funcions definides a trossos

21. Representa gràficament la funció $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ x < -1 \\ x^2 - 1 & si\ x > -1 \end{cases}$.

22. Determina els punts d'intersecció amb els eixos coordenats de la funció $f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x < 2 \\ 2x+1 & si\ x > 2 \end{cases}$.

23. Indica els intervals on la funció $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si\ x < 2 \\ -x^2+4 & si\ x > 2 \end{cases}$ és creixent.

24. Representa gràficament la funció $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & si\ x < 1 \\ 1/x & si\ x > 1 \end{cases}$.

AUTOAVALUACIÓ

1. La recta $y = 4x + 2$ té de pendent m i ordenada a l'origen b:

a) $m = 4$, $b = 0$ b) $m = 1/2$, $b = 6$ c) $m = 2$, $b = 4$ d) $m = 4$, $b = 2$

2. La recta que passa pels punts (1, 6) i (–2, 4) té de pendent m i ordenada a l'origen b:

a) $m = 2$, $b = 4$ b) $m = 3/2$, $b = 6$ c) $m = 2/$, $b = 25/3$ d) $m = 6$, $b = 2/3$

3. Indica quina de les següents funcions lineals és simètrica respecte a l'origen de coordenades:

a) $y = (–10/17)x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 4x + 2$ d) $y = –x + 3$

4. Indica quina de les següents funcions quadràtiques és simètrica respecte a l'eix d'ordenades:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = 4x^2$ d) $y = –x^2 + 3x + 2$

5. Indica el vèrtex de la funció quadràtica $y = 3x^2 + 1$:

a) (0, 1) b) (1, 2) c) (0, 2) d) (0, 3)

6. Assenyala quina de les següents funcions quadràtiques és més *estreta* que $y = x^2$:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (–1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = –x^2 + 3$

7. Indica quina de les següents hipèrboles és simètrica respecte a l'origen de coordenades:

a) $y = –15/21x$ b) $y = 3/x + 1$ c) $y = 4/x + 2$ d) $y = –1/x + 3$

8. Assenyala quina de les següents hipèrboles té com a asímptotes a les rectes $x = 2$ i $y = 3$:

a) $y = –15/(x – 3) –2$ b) $y = 3/(x – 2) + 3$ c) $y = 4/(x + 2) –3$ d) $y = –12/(x + 3) + 2$

9. Si traslladе la hipèrbola $y = 3/x$ mitjançant el vector de translació (1, 3) obtinc la hipèrbola:

a) $y = 3/(x – 1) + 3$ b) $y = 3/(x – 3) + 1$ c) $y = 3/(x + 3) –1$ d) $y = –3/(x + 1) – 3$

10. Assenyala quina de les següents funcions quadràtiques arriba a un màxim absolut:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (–1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = –x^2 + 3$