Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques.

4t B d'ESO

Capítol 14: Combinatòria

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Adela Salvador i María Molero

Revisors: Andrés Hierro i Sergio Hernández

Il·lustracions: Banc d'Imatges d'INTEF i María Molero

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

(N. del T.: Als exercicis proposats de combinatòria amb lletres s'ha respectat l'original en castellà)

Combinatòria: 4t B d'ESO

Índex

Resum

Saber comptar és quelcom important en Matemàtiques. Ja Arquimedes al seu llibre "*Arenari*" es preguntava com comptar el nombre de grans d'arena que hi havia a la Terra.

En aquest capítol aprendrem tècniques que ens permeten comptar. Aprendrem a reconèixer les permutacions, les variacions i les combinacions; i a utilitzar els nombres combinatoris en distintes situacions, com per a desenrotllar un binomi elevat a una potència.

Aquestes tècniques de comptar les utilitzarem en altres parts de les Matemàtiques com en *Probabilitat* per a comptar el nombre de *casos possibles* o el nombre de *casos favorables*.

Autores: Adela Salvador i María Molero

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

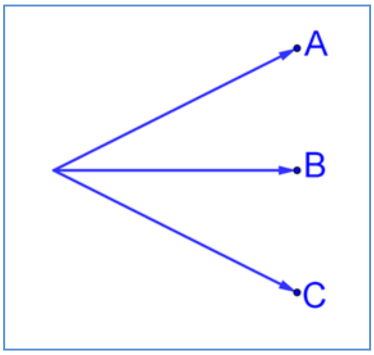
1. PERMUTACIONS

1.1. Diagrames en arbre

Activitats resoltes

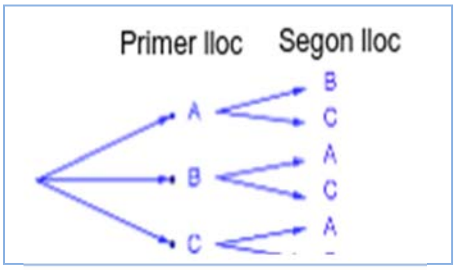
- *En una festa es compta amb tres grups musicals que han d'actuar. Per a organitzar l'orde d'actuació, quantes possibilitats distintes hi ha?*

Una tècnica que pot ajudar molt és confeccionar un **diagrama en arbre**. Consisteix en una representació per nivells en què cada branca representa una opció individual per a passar d'un nivell al següent, de tal manera que tots els possibles recorreguts des de l'arrel fins a l'últim nivell, el nivell de les fulles, són tots els possibles resultats que es poden obtindre.



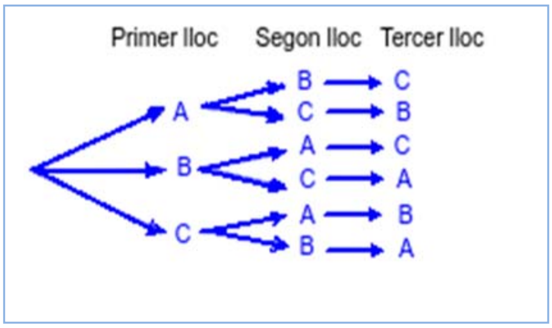
Anomenem als tres grups musicals A, B i C.

Primer nivell de l'arbre: En primer lloc podran actuar o bé A, o bé B o bé C.



Segon nivell de l'arbre: Una vegada que el grup A ha sigut triat per a actuar en primer lloc, per al segon lloc només podrem col·locar a B o a C. Igualment, si ja B va en primer lloc, només podran estar en el segon lloc A o C. I si actua en primer lloc C, per al segon lloc les opcions són A i B.

Tercer nivell de l'arbre: Si ja s'haguera decidit que en primer lloc actua el grup A i en segon el grup B, per al tercer lloc, que es pot decidir? Només ens queda el grup C, I de la mateixa manera, en tots els altres casos, només queda una única possibilitat



Confeccionar el diagrama en arbre, inclús únicament començar a confeccionar-lo, ens permet comptar amb seguretat i facilitat. Per a saber quantes formes tenim d'organitzar el concert, apliquem el principi de multiplicació: només hem de multiplicar els nombres de ramificacions que hi ha en cada nivell: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formes d'organitzar l'orde d'actuació dels grups.

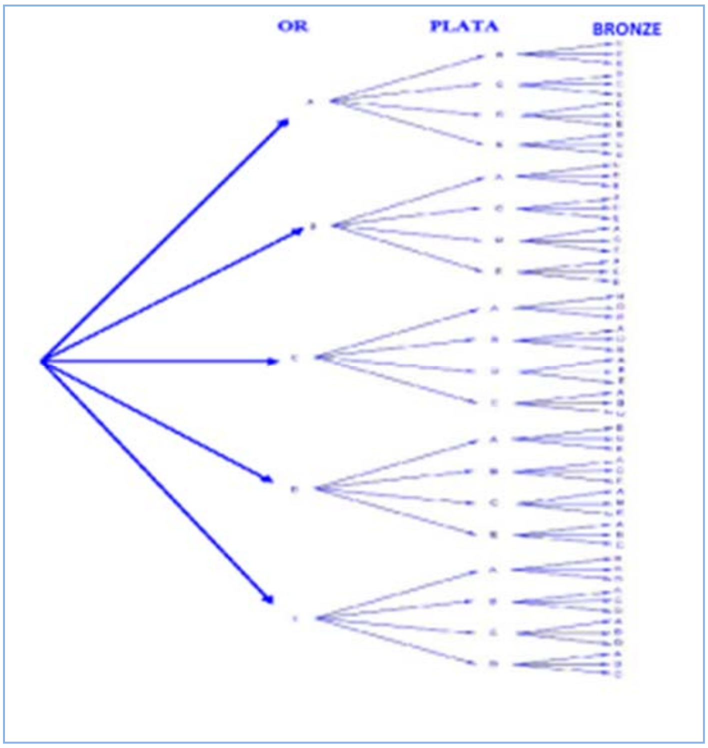
També permet escriure aqueixes sis possibles formes sense més que seguir a l'arbre: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

- *En una carrera competeixen* 5 *corredors i es van a repartir tres medalles, or, plata i bronze, de quantes formes distintes poden repartir-se?*

Fem el diagrama en arbre. L'or el poden guanyar els cinc corredors que anomenarem A, B, C, D i E. Fem les cinc fletxes del diagrama. Si l'or l'haguera guanyat el corredor A, la plata només la podria guanyar algun dels altres quatre corredors: B, C, D o E. Si l'or l'haguera guanyat B també hi hauria quatre possibilitats per a la medalla de plata: A, C, D i E. I així amb la resta.

Si suposem que la medalla d'or l'ha guanyat A i la de plata B, llavors la medalla de bronze la poden guanyar C, D o E.

Per tant hi ha 5 · 4 · 3 = 60 formes diferents de repartir les tres medalles entre els cinc jugadors.



Activitats proposades

1. Fes diagrames en arbre per a calcular:

a) Quantes paraules de dues lletres (amb significat o sense ell) pots escriure amb les lletres A, B o C.

b) Quantes paraules de tres lletres que comencen per vocal i acaben per consonant es poden formar amb les lletres de l'alfabet. (*Recorda* que hi ha 5 vocals i 22 consonants).

2. Anna té 5 camisetes, 3 pantalons i 4 parells de sabatilles. Pot portar una combinació diferent de camiseta, pantaló i sabatilla durant dos mesos (61 dies)? Quants dies haurà de repetir combinació? *Ajuda*: Segur que un diagrama en arbre et resol el problema.

3. En un tauler quadrat amb 25 caselles, de quantes formes diferents podem col·locar dues fitxes idèntiques, de manera que estiguen en distinta fila i en distinta columna? *Suggeriment*: Confecciona un diagrama d'arbre. Quantes caselles hi ha per a col·locar la primera fitxa? Si descartem la seua fila i la seua columna, en quantes caselles podem col·locar la segona fitxa?

1.2. Permutacions o ordenacions d'un conjunt

Anomenem **permutacions** a les possibles formes distintes en què es pot ordenar un conjunt d'elements distints.

Cada canvi en l'orde és una permutació.

Exemples:

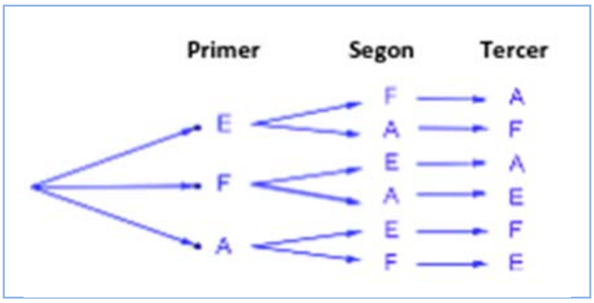
- *Són permutacions:*
  - Les formes en què poden arribar a la meta 10 corredors.
  - Les paraules de quatre lletres, sense repetir cap lletra, amb sentit o sense que podem formar amb les lletres de la paraula TAULA.
  - Els nombres de 5 xifres distintes que es poden formar amb els dígits: 1, 2, 3, 4 i 5.

El nombre de permutacions d'un conjunt de *n* elements es designa per P_n, i es llig *permutacions de n elements*.

L'activitat resolta dels tres grups musicals que actuarien en una festa era de permutacions, era una ordenació, per tant l'escriuríem com P_3, i es llig *permutacions de 3 elements*.

Activitats resoltes

- *A la fase preparatòria d'un campionat del món estan en el mateix grup Espanya, França i Alemanya. Indica de quantes formes poden quedar classificats aquests tres països.*



Són permutacions de 3 elements: P_3. Fem un diagrama d'arbre. Poden quedar primers Espanya (E), França (F) o Alemanya (A). Si ha guanyat Espanya, poden optar pel segon lloc F o A. I si ja hagueren guanyat Espanya i després França, per al tercer lloc només quedaria Alemanya.

Poden quedar de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formes distintes.

En general per a calcular les permutacions de *n* elements es multiplica *n* per $n - 1$, i així, baixant d'un en u, fins a arribar a 1: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. A aquest nombre se l'anomena factorial de *n*, i s'indica *n*!

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Correspon a un arbre de *n* nivells amb $n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$ possibilitats d'elecció respectivament.

Per a realitzar aquesta operació amb la calculadora s'utilitza la tecla **!**

Exemples:

- Les formes en què poden arribar a la meta 10 corredors són:

$$P_{10} = 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800.$$

- Les paraules amb sentit o sense que podem formar amb les lletres, sense repetir, de la paraula TAULA són $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Els nombres de 5 xifres, totes distintes, que es poden formar amb els dígits: 1, 2, 3, 4 i 5 són:

$$P_5 = 5! = 120.$$

- Espanya, França i Alemanya poden quedar classificats de $P_3 = 3! = 6$ formes distintes.

Activitats proposades

4. De quantes formes poden repartir-se quatre persones, quatre pastissos distints, menjant cada persona un pastís?

5. En una carrera de cavalls participen cinc cavalls amb els nombres 1, 2, 3, 4 i 5. Quin d'ells pot arribar el primer? Si la carrera està preparada perquè el nombre quatre arribe el primer, quins d'ells poden arribar en segon lloc? Si la carrera no està preparada, de quantes formes distintes poden arribar a la meta? Fes un diagrama en arbre per a respondre.

6. De quantes maneres pots ficar quatre objectes distints en quatre caixes diferents, si només pots posar un objecte en cada caixa?

7. Quants països formen actualment la Unió Europea? Pots ordenar-los seguint diferents criteris, per exemple per la seua població, o respecte a la seua producció d'acer, o per la superfície que ocupen. De quantes maneres distintes és possible ordenar-los?

8. L'any 1973 havia sis països en el Mercat Comú Europeu. De quantes formes pots ordenar-los?

9. En una oficina de col·locació hi ha set persones. De quantes formes distintes poden haver arribat?

Activitats resoltes

- *Càlcul de* $\frac{6!}{3!}$.

1. Quan calculem quocients amb factorials sempre simplifiquem l'expressió, eliminant els factors del numerador que siguen comuns amb factors del denominador, abans de fer les operacions. En general sempre sol ser preferible simplificar abans d'operar, però en aquest cas resulta imprescindible, perquè no isquen nombres massa grans.

És $\frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} = 6\cdot5\cdot4 = 120$.

- *Expressa, utilitzant factorials, els productes següents:* a) 10·9·8; b) (n+4)·(n+3)·(n+2);

a) $10\cdot9\cdot8 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{10!}{7!}$

b) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$

Activitats proposades

10. Calcula: a) $\frac{6!}{4!}$; b) $\frac{7!}{3!}$; c) $\frac{8!}{5!\cdot3!}$; d) $\frac{6!}{5!}$; e) $\frac{12!}{11!}$; f) $\frac{347!}{346!}$.

11. Calcula: a) $\frac{(n+1)!}{n!}$; b) $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$; c) $\frac{(n+4)!}{(n+2)!}$; d) $\frac{n!}{(n-1)!}$.

12. Expressa utilitzant factorials: a) 5·4·3; b) 10·11·12·13; c) 8·7·6; d) 10·9.

13. Expressa utilitzant factorials: a) $(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)$; b) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$; c) $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k)$.

14. Escriu en forma de factorial les distintes formes que tenen d'assentar-se en una classe els 30 alumnes als 30 llocs que hi ha. (No ho calcules. El resultat és un nombre molt gran, per a calcular-lo es necessita un ordinador o una calculadora, i caldria recórrer a la notació científica per a expressar-lo de forma aproximada).

15. Nou ciclistes circulen per una carretera en fila índia. De quantes formes distintes poden anar ordenats?

2. VARIACIONS

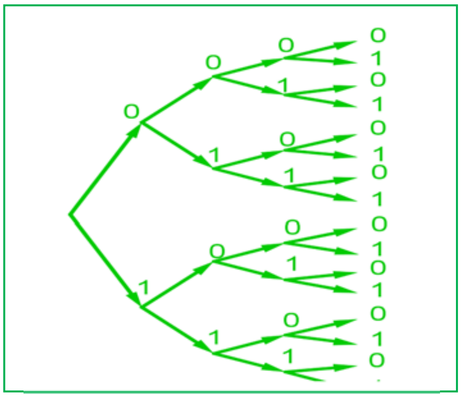
2.1. Variacions amb repetició

Ja saps que les quinieles consisteixen a endevinar els resultats de 14 partits de futbol assenyalant un 1 si pensem que guanyarà l'equip de casa, un 2 si guanya el visitant i una X si esperem que hi haja empat. En una mateixa jornada, quantes quinieles distintes podien omplir-se?

Observa que ara cada diferent quiniela consisteix en una seqüència dels símbols 1, 2 i X, en les que el mateix símbol pot aparèixer diverses vegades **repetit** al llarg de la seqüència i dues quinieles poden diferenciar-se pels **elements** que la componen o per **l'orde** en què apareixen.

Activitats resoltes

- *Amb dos símbols,* 0 *i* 1*, quantes tires de* 4 *símbols es poden escriure?*



Igual que en anteriors exemples, formem el diagrama d'arbre. Observant que al primer lloc de la tira podem posar els dos símbols. Al segon lloc, encara que hàgem posat el 0, com es pot repetir, podem tornar a posar el 0 i l'1. El mateix al tercer i al quart lloc. És a dir, el nombre de ramificacions no es va reduint, sempre és igual, per tant el nombre de tires distintes que podem formar és

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16 \text{ tires distintes.}$$

Les diferents seqüències de longitud n que es poden formar amb un conjunt de m elements diferents, s'anomenen **variacions amb repetició** de m elements presos de n en n. El nombre de diferents seqüències que es poden formar es designa amb l'expressió $VR_{m,n}$. i es calcula amb la fórmula:

$$\mathbf{VR_{m,n} = m^n}$$

A l'***activitat resolta*** anterior són variacions amb repetició de 2 elements presos de 4 en 4:

$$VR_{2,4} = 2^4 = 16 \text{ tires distintes.}$$

Activitat resolta

- Al càlcul del nombre *de quinieles distintes,* els elements són 3 (1, 2, X) i es formen seqüències de longitud 14, per tant es tracta de *variacions amb repetició* de 3 elements presos de 14 en 14:

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4\ 782\ 969.$$

Per a tindre la certesa absoluta d'aconseguir 14 encerts cal omplir 4 782 969 apostes simples.

- *La probabilitat que et toque una quiniela en una aposta simple és*, per tant, $\frac{1}{4782969}$.

Activitats proposades

16. Amb els 10 dígits, quants nombres distints poden formar-se de 6 xifres?

17. Amb els 10 dígits i les 22 consonants de l'alfabet, quantes matricules de cotxe poden formar-se prenent quatre dígits i tres lletres?

18. Un byte o octet és una seqüència de zeros i uns presos de 8 en 8. Quants bytes distints poden formar-se?

19. Calcula: a) $VR_{4,2}$; b) $VR_{4,4}$; c) $VR_{11,2}$; d) $VR_{2,11}$.

20. Expressa amb una fórmula:

a) Les variacions amb repetició de 3 elements presos de 5 en 5.

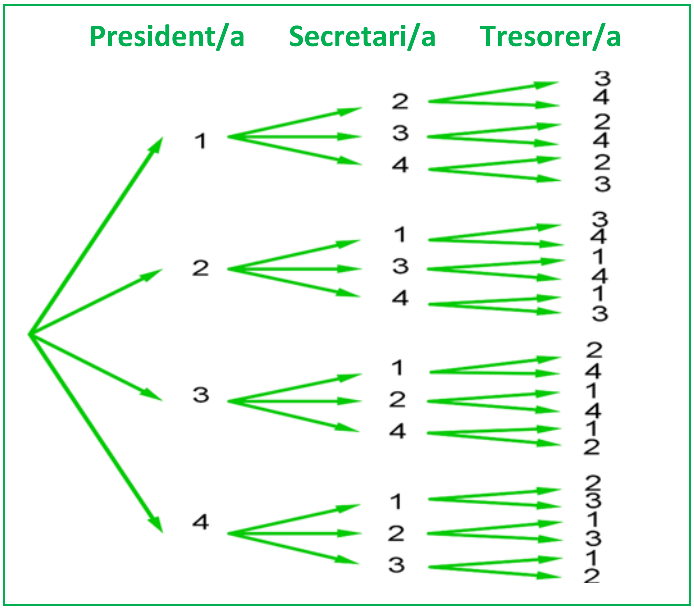
b) Les variacions amb repetició de 7 elements presos de 2 en 2.

c) Les variacions amb repetició de 5 elements presos de 4 en 4.

21. Quantes paraules de tres lletres (amb significat o no) pots formar que comencen per consonant i acaben amb la lletra R?

2.2. Variacions sense repetició

Activitats resoltes



- Una associació de veïns renovarà la junta directiva. Aquesta consta de tres càrrecs, presidència, secretaria i tresoreria. a) Si únicament es presenten quatre persones. De quantes maneres pot estar formada la junta? b) Si, abans de que comence la votació, es presenten altres dos candidats, quantes juntes diferents podran formar-se ara?

a) Confeccionem el nostre diagrama en arbre. Numerem els candidats de l'1 al 4. A la presidència poden optar els 4 candidats, però si un determinat candidat ja ha sigut triat per a la presidència, no podrà optar als altres dos càrrecs, per la qual cosa des de cada una de les primeres quatre branques, només eixiran tres branques. Una vegada triada una persona per a la presidència i la secretaria, per a optar a la tresoreria hi haurà únicament dues opcions, per la qual cosa de cada una de les branques del segon nivell, ixen dues branques per al tercer nivell.

D'aquesta manera, multiplicant el nombre de ramificacions en cada nivell, tenim que la junta pot estar formada de 4 · 3 · 2 = 24 maneres.

b)Si en compte de 4 candidats fossen 6, podria estar formada de 6 · 5 · 4 = 120 maneres.

Aquestes agrupacions d'elements, en que un element pot aparèixer en cada grup com a màxim una vegada, sense repetir-se, i cada grup es diferència dels altres pels elements que el componen o per l'orde en què apareixen es denominen *variacions sense repetició*.

A les variacions, tant amb repetició com sense repetició, es tenen en compte **l'orde** i els **elements** que formen el grup. La diferència és que a les variacions amb repetició poden repetir-se els elements i a les variacions ordinàries no. A l'exemple anterior no tindria sentit que un mateix candidat ocupara dos càrrecs, **no es repeteixen els elements**.

Les **variacions sense repetició** (o simplement **variacions**) de m elements presos de *n* en *n* es designen com $V_{m,n}$. Són els grups de *n* elements distints que es poden formar de manera que un grup es diferencie d'un altre bé pels **elements** que el componen bé per **l'orde** en què apareixen.

El nombre de variacions és igual al producte de multiplicar *n* factors partint de m i decreixent d'un en un:

$$\mathbf{V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots} \ (n \text{ factors})$$

Observacions

1) *m* ha de ser sempre major o igual que *n*.
2) Les variacions de m elements presos de *m* en *m* coincideixen amb les permutacions de m elements: $V_{m,m} = P_m$.

Activitats resoltes

- *Observa les següents variacions i intenta trobar una expressió per a l'últim factor que es multiplica al càlcul de les variacions:*

  a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2$

  b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4$

  c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

  d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$

  Al cas a) 2 és igual a 4 – 3 + 1.

  A b) 4 = 6 – 3 + 1.

  A c) 5 = 10 – 6 + 1.

  A d) 6 = 9 – 4 + 1.

En general l'últim element és $(m - n + 1)$.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$$

- *Escriu la fórmula de les variacions utilitzant factorials:*

a) $V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{4!}{1!}$

b) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$

d) $V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{5!}$

Per a escriure-ho com a quocient de factorials s'ha de dividir per $(m - n)!$.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Per a realitzar aquesta operació amb la *calculadora* s'utilitza la tecla etiquetada ***nPr***

Activitats proposades

22. Tres persones van a una pastisseria en què únicament queden quatre pastissos, distints entre si. De quantes formes distintes poden triar el seu pastís si cada una compra un?

23. Amb els 10 dígits es desitgen escriure nombres de quatre xifres, totes elles distintes. Quantes possibilitats hi ha per a escriure la primera xifra? Una vegada triada la primera, quantes hi ha per a triar la segona? Una vegada triades les dues primeres, quantes hi ha per a la tercera? Quantes possibilitats hi ha en total?

24. Si tens 9 elements diferents i els has d'ordenar de 5 en 5 de totes les formes possibles, quantes hi ha?

25. Amb les lletres A, B i C, quantes paraules de 2 lletres no repetides podries escriure?

26. Amb els dígits 3, 5, 7, 8 i 9, quants nombres de 3 xifres distintes pots formar?

27. Calcula: a) $V_{11,6}$; b) $V_{7,5}$; c) $V_{8,4}$.

28. Calcula: a) $\frac{7!}{3!}$; b) $\frac{6!}{4!}$; c) $\frac{10!}{8!}$.

Una altra observació

Hem dita que $V_{m,m} = P_m$ però si utilitzem la fórmula amb factorials tenim que $V_{m,m} = P_m = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!}$. Perquè tinga sentit s'assigna a 0! el valor d'1.

0! = 1.

3. COMBINACIONS

3.1. Combinacions

Activitats resoltes

- *En una llibreria volen fer paquets de tres llibres, usant els sis llibres més llegits. Quants paquets diferents podran fer?*

En aquest cas cada grup de tres llibres es diferenciarà dels altres possibles pels llibres (**elements**) que el componen, sense que importe l'orde en què aquests s'empaqueten. A aquesta agrupació se la denomina combinació.

S'anomena **combinacions** de m elements presos de *n* en *n* i es designa $C_{m,n}$ als grups de *n* elements que es poden formar a partir d'un conjunt de m elements diferents entre si, de manera que cada grup es diferencie dels altres pels **elements** que el formen (no per l'orde en què apareixen).

Designem els llibres amb les lletres A, B, C, D, E i F.

Paquets amb A				Paquets sense A però amb B			Paquets sense A ni B però amb C		
ABC				BCD			CDE		
ABD	ACD			BCE	BDE		CDF	CEF	DEF
ABE	ACE	ADE		BCF	BDF	BEF			
ABF	ACF	ADF	AEF						

Hem format primer tots els paquets que contenen el llibre A, hi ha 10; Després continuem formant els que no contenen el llibre A però si contenen el B. Després els que no contenen ni A ni B però sí C. I finalment, el paquet DEF que no conté els llibres A, B ni C. Amb aquest recompte hem identificat un total de 20 paquets distints. $C_{6,3} = 20$.

Aquesta forma de fer-ho és poc pràctica. Per a trobar una fórmula general que ens permeta calcular el nombre de grups, anem a recolzar-nos en el que ja sabem.

Si fóra rellevant l'orde en què apareixen els llibres en cada paquet, a més dels llibres que el componen, seria un problema de variacions i calcularíem: $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ diferents:

ABC, ABD, ABE, ABF, ACB, ACD, ACE, ACF, ADB, ADC, ADE, ADF, AEB, AEC, AED, AEF, AFB, AFC, AFD, AFE, BAC, BAD, BAE, BAF, BCA, BCD, BCE, BCF, BDA, BDC, BDE, BDF, BEA, BEC, BED, BEF, BFA, BFC, BFD, BFE, CAB, CAD, CAE, CAF, CBA, CBD, CBE, CBF, CDA, CDB, CDE, CDF, CEA, CEB, CED, CEF, CFA, CFB, CFD, CFE, DAB, DAC, DAE, DAF, DBA, DBC, DBE, DBF, DCA, DCB, DCE, DCF, DEA, DEB, DEC, DEF, DFA, DFB, DFC, DFE, EAB, EAC, EAD, EAF, EBA, EBC, EBD, EBF, ECA, ECB, ECD, ECF, EDA, EDB, EDC, EDF, EFA, EFB, EFC, EFD, FAB, FAC, FAD, FAE, FBA, FBC, FBD, FBE, FCA, FCB, FCD, FCE, FDA, FDB, FDC , FDE, FEA, FEB, FEC, FED.

A la llista anterior hem assenyalat amb el mateix color alguns dels paquets que contenen els mateixos tres llibres, veuràs que el paquet amb els llibres A, B i C es repeteix sis vegades: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Les mateixes vegades es repeteix el paquet ABD, l'ACF, etc. Pots provar a assenyalar qualsevol altra combinació i veuràs que totes estan repetides exactament sis vegades. Això és degut al fet que hi ha sis variacions possibles amb la mateixa composició d'elements, que es diferencien per l'orde (les permutacions d'aqueixos tres elements que són $P_3 = 6$). Així doncs, com al recompte de variacions, cada paquet està comptat $P_3 = 6$ vegades. Per a saber el nombre de paquets diferents dividim el total de variacions entre $P_3 = 6$.

Per tant n'hi ha prou amb dividir les variacions entre les permutacions:

$$C_{6,3} = \frac{V_{6,3}}{P_3} = \frac{120}{6} = 20.$$

I, en general, d'acord amb el mateix raonament es calculen les combinacions de m elements presos de *n* en *n*, dividint les variacions entre les permutacions, amb la fórmula:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Per a realitzar aquesta operació amb la calculadora s'utilitza la tecla etiquetada ***nCr***

Activitats resoltes

- *Un test consta de* 10 *preguntes i per a aprovar cal respondre* 6 *correctament. De quantes formes es poden triar aqueixes* 6 *preguntes?*

  No importa en quin orde es trien les preguntes, sinó quines són les preguntes triades. No poden repetir-se (no té sentit que respongues 3 vegades la primera pregunta). Únicament influeixen les preguntes (els elements). Es tracta d'un problema de combinacions, en que hem de formar grups de 6, d'un conjunt format per 10 preguntes diferents, per tant són combinacions, $C_{10,6}$.

  $$C_{10,6} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210 \text{ maneres.}$$

- *Tenim 5 llibres sense llegir i volem emportar-nos tres per a llegir-los en vacacions, de quantes maneres distintes podem triar-los?*

  Són combinacions de 5 elements presos de 3 en 3. $C_{5,3}$ = 10 formes.

- *Tens* 7 *monedes d'euro que col·loques en fila. Si* 3 *mostren la cara i 4 la creu, de quantes formes distintes pots ordenar-les?*

  Bastarà de col·locar en primer lloc les cares i als llocs lliures posar les creus. Tenim 7 llocs per a col·locar 3 cares, seran per tant les combinacions de 7 elements presos de 3 en 3. $C_{7,3}$ = 35. Observa que s'obté el mateix resultat si col·loques les creus i deixes els llocs lliures per a les cares ja que $C_{7,4}$ = 35.

Activitats proposades

29. Tenim 5 bombons (iguals) que volem repartir entre 7 amics, de quantes formes es poden repartir els bombons si a cap li anem a donar més d'un bombó?

30. Juan vol regalar 3 DVDs a Pedro dels 10 que té, de quantes formes distintes pot fer-ho?

31. En el joc del pòquer es dóna a cada jugador una mà formada per cinc cartes, de les 52 que té la baralla francesa, quantes mans diferents pot rebre un jugador?

3.2. Nombres combinatoris

Les combinacions són molt útils, per la qual cosa el seu ús freqüent fa que s'haja definit una expressió matemàtica denominada nombre combinatori.

El **nombre combinatori** *m* sobre *n* es designa $\binom{m}{n}$ i és igual a:

$$\binom{m}{n} = C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

Propietats dels nombres combinatoris

Activitats resoltes

- *Calcula* $\binom{7}{0}$, $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{0}$, $\binom{4}{0}$.

Hauràs comprovat que: $\binom{7}{0} = 1$, $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{9}{0} = 1$ i $\binom{4}{0} = 1$. Raona el motiu. Podem generalitzar i dir que $\binom{m}{0} = 1$? En efecte: $\binom{m}{0} = \frac{m!}{m! \cdot 0!} = 1$. Recorda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{7}$, $\binom{5}{5}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{4}$.

Hauràs comprovat que: $\binom{7}{7} = 1$, $\binom{5}{5} = 1$, $\binom{9}{9} = 1$ i $\binom{4}{4} = 1$. Raona el motiu. Podem generalitzar i dir que $\binom{m}{m} = 1$? En efecte: $\binom{m}{m} = \frac{m!}{(m-m)! \cdot m!} = \frac{m!}{0! \cdot m!} = 1$. Recorda que 0! = 1.

- *Calcula* $\binom{7}{1}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{9}{1}$, $\binom{4}{1}$.

Hauràs comprovat que: $\binom{7}{1} = 7$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{9}{1} = 9$ i $\binom{4}{1} = 4$. Raona el motiu. Podem generalitzar i dir que $\binom{m}{1} = m$? En efecte: $\binom{m}{1} = \frac{m!}{(m-1)! \cdot 1!} = m$.

- *Calcula* $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{9}{7}$, $\binom{9}{2}$ *i indica quins són iguals.*

Hauràs comprovat que: $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$ i que $\binom{9}{7} = \binom{9}{2}$. Raona el motiu. Podem generalitzar i dir que $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$?

En efecte: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!} = \frac{m!}{(m-(m-n))!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$.

Fins ara totes les propietats han sigut molt fàcils. Tenim ara una propietat més difícil. Vegem que:

$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.

Però abans ho comprovarem amb un problema.

- *Lluís i Miriam s'han casat i els han regalat sis objectes d'adorn. Volen posar tres en una estanteria, però Miriam vol que en l'estanteria estiga, sí o sí, el regal de sa mare. No obstant això, a Lluís no li agrada aqueix objecte, i li dóna igual qualsevol combinació en què no estiga. Un dels dos s'eixirà amb la seua. Calcula quantes són les possibilitats de cada u.*

A Lluís i Miriam els han regalat 6 objectes d'adorn i volen posar 3 en una estanteria. Les formes de fer-ho són $C_{6,3} = \binom{6}{3}$.

Però Miriam vol que en l'estanteria estiga, sí o sí, el regal de sa mare. De quantes formes ho faria Miriam? Són $C_{5,2} = \binom{5}{2}$.

No obstant això a Lluís, aqueix objecte no li agrada, i li dóna igual qualsevol combinació en què no estiga. De quantes formes ho faria Lluís? Són $C_{5,3} = \binom{5}{3}$.

Les opcions de Miriam més les de Lluís són les totals: $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$.

- *Comprova que* $\binom{6}{3} = \binom{5}{3} + \binom{5}{2}$ *i que* $\binom{7}{5} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$.

En general, $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$.

T'atreveixes a demostrar-ho?

Per a demostrar-ho recorrem a la definició i realitzem operacions:

$\binom{m-1}{n}+\binom{m-1}{n-1}=\frac{(m-1)!}{(m-1-n)!\cdot n!}+\frac{(m-1)!}{(m-1-(n-1))!\cdot(n-1)!}$ reduïm a comú denominador

$=\frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)\cdot(m-1-n)!\cdot n!}+\frac{n\cdot(m-1)!}{n\cdot(m-n)!\cdot(n-1)!}$ Recorda: $m\cdot(m-1)! = m!$

$=\frac{(m-n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}+\frac{n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$ Posem el denominador comú i sumem els numeradors

$=\frac{(m-n)\cdot(m-1)!+n\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$ Traiem $(m-1)!$ factor comú

$=\frac{(m-n+n)\cdot(m-1)!}{(m-n)!\cdot n!}$ De nou usem que $m\cdot(m-1)! = m!$

$=\frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}=\binom{m}{n}$.

Triangle de Pascal o Triangle de Tartaglia

A un matemàtic italià del segle XVI, que li van dir Tartaglia perquè era botijós, se li va ocórrer disposar als nombres combinatoris així:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}$$
....

O bé calculant els seus valors corresponents:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

...

A ambdós triangles se'ls anomena **Triangle de *Pascal*** o **Triangle de *Tartaglia***.

Els valors que cal posar en cada fila del triangle es calculen, sense haver d'usar la fórmula dels nombres combinatoris, d'una forma més fàcil basada en les propietats dels nombres combinatoris que acabem de provar:

Per la propietat $\binom{m}{0} = 1 = \binom{m}{m}$, cada fila comença i acaba amb 1.

Per la propietat $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, sabem que el *Triangle de Tartaglia* és simètric o siga que el primer element de cada fila coincideix amb l'últim, el segon amb el penúltim i així successivament.

Per la propietat $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$, podem obtindre les següents files sumant termes de l'anterior, ja que cada posició en una fila és la suma de les dos que té just damunt a la fila anterior.

D'aquesta manera el triangle es construeix seqüencialment, afegint files per baix fins a arribar a la que ens interessa. Si només necessitem conèixer un nombre combinatori aïllat, tal vegada no val la pena desenrotllar tot el triangle, però moltes vegades necessitem conèixer els valors de tota una fila del triangle (per exemple quan desenrotllem un binomi de Newton, o quan resolem problemes de probabilitat).

Activitats proposades

32. Afig tres files més al triangle de *Tartaglia* de la dreta.

33. Suma els nombres de cada fila i comprova que la suma dels elements de la fila m és sempre igual a 2^m.

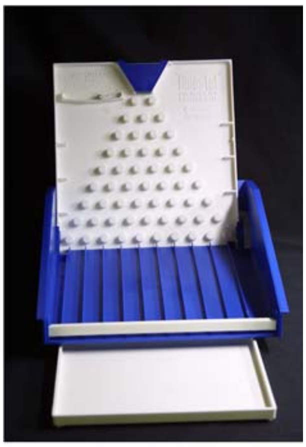
34. Sense calcular-los, indica quant valen $C_{5,3}$; $C_{5,4}$; $C_{5,2}$ i $C_{5,5}$ buscant el seu valor al triangle.

1	$1 = 2^0$
1 1	$2 = 2^1$
1 2 1	$4 = 2^2$
1 3 3 1	$8 = 2^3$
1 4 6 4 1	$16 = 2^4$
1 5 10 10 5 1	$32 = 2^5$

Recorreguts aleatoris o caminades a l'atzar

Els nombres combinatoris serveixen com a model per a resoldre situacions molt diverses.

Activitats resoltes



El dispositiu que apareix a l'esquerra es denomina *aparell de Galton*. El seu funcionament és el següent: quan s'introdueix una bola per l'embut superior, va caient pels buits que existeixen en cada fila. En cada pas pot caure pel buit que té a la seua dreta o pel que té a la seua esquerra amb la mateixa probabilitat, de manera que és impossible, quan posem una bola en l'embut predir en quin dels carrils inferiors acabarà caient.

- *Si introduïm moltes boles pel forat superior, per exemple* 1024, *creus que en arribar a baix es distribuiran uniformement entre tots els carrils o hi haurà llocs a què arriben més boles?*

Observa que per a arribar a la primera fila, només hi ha un camí possible, que és el que va sempre cap a l'esquerra, i per a arribar a l'última, l'únic camí possible és el que va sempre a la dreta.

Mentres que per a arribar als buits centrals de cada fila el nombre de camins possibles és major. Per exemple, per a arribar al segon buit de la segona fila, hi ha dos camins. En general, al primer buit de cada fila només arriba un camí, igual que a l'últim i a cada un dels altres buits arriben tants camins com la suma dels camins que arriben als dos buits que té just damunt. Comprova que per a arribar al buit *n* de la fila *m* hi ha $\binom{m}{n}$ camins.

En resum, el nombre de camins aleatoris que arriben a cada buit es calcula igual que els nombres al triangle de *Tartaglia*. Si el nostre *aparell de Galton* té 9 files, el nombre de camins que arriben a cada un dels compartiments d'eixida és el que s'obté amb la novena fila del Triangle de *Tartaglia*: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1, d'un total de 2^9 = 512 camins diferents que pot realitzar la bola. Així que quan tirem en l'aparell 1024 boles, hi haurà aproximadament 2 boles que facen cada un dels 512 recorreguts possibles, ja que tots tenen la mateixa probabilitat d'ocórrer. Per tant el nombre de boles que podem esperar que caiguen en cada compartiment és el següent:

Compartiment	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre aproximat de boles	$\frac{1024}{512}$ =2	9·2 = 18	36·2 = 72	84·2 = 168	126·2 = 252	126·2 = 252	84·2 = 168	36·2 = 72	9·2 = 18	2

Veiem que no es deposita el mateix nombre de boles en tots els compartiments. Mentres que en els extrems hi haurà aproximadament 2 boles, en els centrals hi haurà unes 252.

D'acord amb la llei dels grans nombres, els resultats experimentals seran més pareguts als teòrics quant major siga el nombre de vegades que es realitza l'experiment (és a dir, quant major siga el nombre de boles). En Youtube *buscant* l'expressió *"màquina de Galton" pots* veure molts vídeos en què es realitza l'experiment i es verifica aquest fet.

Nombre d'èxits

Activitats resoltes

- En una sessió de tir al plat es realitzen successivament 10 tirs. Quantes possibilitats haurà d'encertar en el blanc exactament tres vegades (tindre tres èxits)?

Són les $C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$.

En resum

$\binom{m}{n}$ = Nombre de combinacions de m elements presos de *n* en *n*

Nombre de camins possibles per a arribar al buit *n* de la fila *m* de l'aparell de Galton

Nombre de subconjunts de *n* elements presos en un conjunt de m elements

Nombre de successos en què obtenim *n* èxits en *m proves*

Nombres de mostres sense ordenar de grandària *n* en una població de grandària *m*.

3.3. Binomi de Newton

Calcularem les successives potències d'un binomi. Ja saps que:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Per a calcular $(a + b)^4$ multipliquem $(a + b)^3$ por $(a + b)$.

$(a + b)^4 = (a + b)^3\cdot(a + b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)\cdot(a + b)$

$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4=$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Observa que per a trobar cada un dels coeficients de $(a + b)^4$, excepte el primer i l'últim que valen 1, se sumen els coeficients igual que al triangle de Tartaglia. S'obté cada element sumant els dos que té damunt.

Activitats resoltes

- *Series capaç de calcular* $(a + b)^5$ *només observant?*

Fixa't que sempre apareixen tots els possibles termes del grau que estem calculant, per la qual cosa per a calcular la cinquena potència tindrem: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 i b^5. Els exponents estan ordenats de manera que els de a van descendint des de 5 fins a 0, i els de b van augmentant des de 0 fins a 5 (recorda $a^0=1$).

El coeficient del primer i últim terme és 1.

Els coeficients s'obtenen sumant els dels termes de la fila anterior, com al *Triangle de Tartaglia*. Són la cinquena fila del *Triangle de Tartaglia*.

Per tant $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Podem escriure'l també utilitzant nombres combinatoris:

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5.$$

Activitats proposades

35. Desenrotlla $(a + b)^6$

En general:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Aquesta igualtat es denomina ***Binomi de Newton***.

Activitats resoltes

- *Com calcularies* $(a - b)^n$?

Basta aplica la fórmula del Binomi de Newton a $(a + (-b))^n$.

Recorda $(-b)$ elevat a un exponent parell té signe positiu i elevat a un exponent imparell el té negatiu.

Per tant $(a - b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} b^n$. Els signes són alternativament positius i negatius.

Activitats proposades

36. Desenrotlla

a) $(a - b)^6$;

b) $(x - 3)^4$;

c) $(x + 2)^7$;

d) $(-x + 3)^5$.

37. Calcula el coeficient de x^7 al polinomi que s'obté en desenrotllar $\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)^5$

38. Expressa amb radicals simplificats el polinomi que s'obté en desenrotllar $\left(-\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

4. ALTRES PROBLEMES DE COMBINATÒRIA

4.1. Resolució de problemes

Recorda: per a resoldre un problema és convenient tindre en compte les fases següents:

Fase 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Llig-lo fins a assegurar-te d'haver comprés l'enunciat, quines dades et donen?, què et demanen?

Fase 2: Busca una bona estratègia.

Si el problema és de *Combinatòria* una possible bona estratègia pot ser analitzar si és un problema de permutacions, de variacions o de combinacions i, en aqueix cas, aplicar la fórmula que ja coneixes. Aquesta estratègia podríem anomenar-la:

Mira si el teu problema s'assembla a algun que ja conegues

Però una altra possible bona estratègia, que no exclou l'anterior, és començar a fer un diagrama en arbre. A aquesta estratègia podem anomenar-la:

Experimenta, juga amb el problema

O bé:

Fes un diagrama, un esquema, una taula...

La fase següent a seguir és:

Fase 3: Porta avant la teua estratègia

Segur que utilitzant aquestes estratègies, resols el problema. Finalment, quan ja l'hages resolt:

Fase 4: Pensa si és raonable el resultat. Comprova l'estratègia. Generalitza el procés.

4.2. Permutacions circulars

Utilitzarem aquestes tècniques, o altres distintes, per a resoldre un problema:

Activitats resoltes

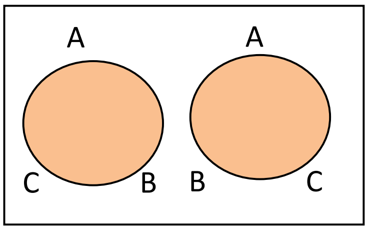
- Deu amics i amigues van a dinar i al restaurant els assenten en una taula redona. De quantes formes poden assentar-se?

Si en compte d'una taula fora un banc, ja sabem resoldre el problema, és un problema de *Permutacions*. La solució seria 10! formes distintes. Però és una taula redona, no té un primer seient ni un últim seient. Tampoc és senzill, pel mateix motiu, dissenyar el diagrama en arbre. Què fem? Pensa. Busca una bona estratègia.

Una bona estratègia potser serà:

Fes-ho més fàcil per a començar

Deu són molts. Pensa en tres: A, B i C. Si fóra un banc, les possibilitats serien 3! = 6. Assenta'ls ara en una taula redona. La possibilitat ABC, és ara la mateixa que BCA i que CAB. Ens queden només dues formes diferents d'assentar-los.



Anomenem PC a aqueixa permutació circular.

Tenim doncs que $P_2 = 2! = 2$ i $PC_2 = 1$; $P_3 = 3! = 6$ i $PC_3 = 2$. Com podem assentar a 4 persones en una taula circular? La permutació ABCD ara és la mateixa que BCDA, i que CDAB i que DABC, doncs si $P_4=4!=24$, aleshores $PC_4 = P_4/4 = 6$.

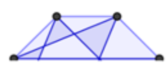
Sabem ja resoldre el nostre problema inicial?

És $PC_{10} = P_{10}/10 = P_9 = 9!$ Raona aquesta resposta.

Activitats proposades

39. Tres amics "A", "B" i "C" estan jugant a les cartes. Cada un passa una carta al què està a la seua dreta. U és espanyol, un altre italià i l'altre portuguès. "A" li passa una carta a l'italià. "B" se l'ha passat a l'amic que li l'ha passat a l'espanyol. Quin dels amics és espanyol, quin italià i quin portuguès? *Ajuda*: Fes un diagrama circular com l'anterior.

40. Anna i Alexandre inviten a sopar a 3 amics i 3 amigues, quantes formes tenen de col·locar-se en una taula redona? En quantes estan junts Anna i Alexandre? En quantes no hi ha dos xics ni dues xiques junts?



41. Quantes poligonals tancades es poden dibuixar amb els 8 vèrtexs d'un octògon?

4.3. Permutacions amb repetició

Activitats resoltes

- *Quantes paraules 8 lletres, amb sentit o sense ell, es poden formar on les lletres de la paraula RASTREJAR?*

Observem que la lletra "R" es repeteix tres vegades i la lletra "A", dues vegades. Si les 9 lletres foren distintes el nombre de paraules que es podrien formar seria 9!, però entre aquestes 362 880 paraules observem que totes aquelles en què estan permutades les dues lletres "A" són iguals, per tant tenim la mitat de les paraules 181 440. A més en considerar les tres lletres "R" que hem considerat distintes i que són iguals tenim que per cada paraula diferent hi ha 6, és a dir 3!, que són iguals, per tant el nombre de paraules diferents és 30 240.

Per tant, les permutacions de 9 elements de què unisc es repeteix 3 vegades i un altre 2 serà:

$$PR_{9,3,2} = \frac{9!}{2!3!} = 30240$$

Observa que el nombre de les permutacions de dos elements de què unisc es repeteix *k* vegades i l'altre *n* – *k* vegades coincideix amb el nombre combinatori $\binom{n}{k}$.

Activitats proposades

42. Amb els dígits 1, 2, i 3 quants nombres diferents de 7 xifres pots formar amb tres vegades la xifra 1, dues vegades la xifra 2 i dues vegades la xifra 3.

43. Amb les lletres de la paraula CARCAJADA, quantes paraules amb aquestes 9 lletres, amb sentit o sense ell, es poden formar?

44. Tenim dues fitxes blanques, tres negres i quatre roges, de quantes formes distintes podem apilar-les? En quantes no queden les dues fitxes blanques juntes?

45. El cadenat de la meua maleta té 7 posicions en què es pot posar qualsevol dels 10 dígits del 0 al 9. Quantes contrasenyes diferents podria posar? Quantes tenen tots els seus nombres distints? Quantes tenen algun nombre repetit? Quantes tenen un nombre repetit dues vegades? Ajuda*:* Observa que per a calcular les que tenen algun nombre repetit el més fàcil és restar del total les que tenen tots els seus nombres distints.

4.4. Combinacions amb repetició

Activitats resoltes

- *Un grup de 10 amics se'n van d'excursió i un d'ells s'encarrega de comprar una beguda per a cada u, podent triar entre aigua, batut o refresc. De quantes maneres diferents pot realitzar-se l'encàrrec?*

Per a resoldre aquest problema hem de formar una seqüència de 10 elements, d'un conjunt format pels tres elements A, B, R. Està clar que no importa l'orde en què es compren les begudes, per la qual cosa es tracta de combinacions. Però cada element pot aparèixer en la combinació més d'una vegada. Per exemple una solució formada per dos d'aigua, tres de batut i cinc de refresc, es representaria

AABBBRRRRR. Qualsevol altra combinació haurà de diferenciar-se d'ella per almenys un element de la seua composició. Així que veient que cada seqüència comença amb una repetició de l'element A, segueix amb una altra de l'element B i acaba amb repeticions de l'element R, sent en total 10 els elements que es prenen, podem representar-les per una sèrie de 10 buits amb dos guions de separació entre ells.

A A – B B B – R R R R R (Combinació que representa dos d'aigua, tres de batut i cinc de refresc)

– – R R R R R R R R R R (Combinació que representa només deu de refresc)

– B B B B – R R R R R R (Combinació que representa quatre de batut i sis de refresc)

Així que cada una de les combinacions es correspon amb **una forma de triar on col·locar els guions**, és a dir de 12 possibles posicions triar dos. Com no importa en quin orde es col·loquen els guions i no poden estar els dos a la mateixa posició, aqueix nombre serà igual a les combinacions de 12 elements presos de 2 en 2, per tant serà:

$$\binom{12}{2} = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66$$

En general,

S'anomenen **combinacions amb repetició** de m elements presos de *n* en *n* i es designen $CR_{m,n}$ als grups de *n* elements que es poden formar a partir d'un conjunt de m elements diferents entre si, de manera que cada grup es diferencie dels altres pels **elements** que el formen i amb la possibilitat que cada element aparega més d'una vegada.

Coincideixen amb el nombre de seqüències que es poden formar de *m* buits i *n – 1* guions, per tant:

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n-1}$$

Activitats proposades

46. En una caixa hi ha boles roges, negres i blaus. Si fiquem la mà a la caixa i traiem 8 boles, de quantes formes possibles pot realitzar-se l'extracció?

47. De quantes maneres possibles es poden menjar quatre amics 10 caramels iguals?

Problemes d'ampliació

Activitat resolta

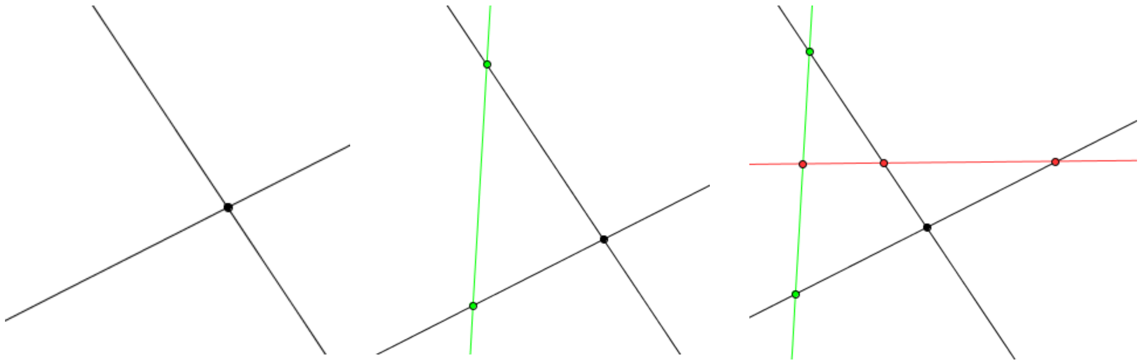
- *Si n rectes d'un mateix pla es tallen dos a dos en punts que són tots distints, es partix així el pla en regions distintes. Quin és el nombre d'aqueixes regions? Quants segments hi ha? Quants punts apareixen?*

Fase 1: Abans de començar a actuar, intenta entendre bé el problema

Per a entendre bé el problema dibuixa rectes al pla per a anar comptant punts, regions i segments

Fase 2: Busca una bona estratègia.

Una bona estratègia consisteix a experimentar amb casos particulars:



S’observa que:

Amb 2 rectes hi ha 4 regions, 1 punt i 4 segments infinits (semirectes).

Amb 3 rectes: En afegir la tercera recta

- Tres de les regions s’han dividit en dos: 4 + 3 = 7 regions.
- S’afigen els 2 punts en què aqueixa recta talla a les anteriors 1 + 2 = 3.
- Es tenen 5 segments més: 3 finits +2 semirectes: 4 + 5 = 9.
    - En particular les semirectes han augmentat en dos: 4 + 2 = 6

Amb 4 rectes: En afegir la quarta recta:

- Quatre de les regions s’han dividit en dos: 7 + 4 = 11 regions
- S’afigen els 3 punts en què aqueixa recta talla a les anteriors 3 + 3 = 6.
- Es tenen 7 segments més: 5 finits + 2 semirectes: 9 + 7 = 16.
    - En particular les semirectes han augmentat en dos: 6 + 2 = 8

Una altra bona estratègia és elaborar una taula amb els resultats obtinguts:

Rectes	Punts	Regions	Segments	Semirectes
2	1	4	4	4
3	1 + 2 = 3	4 + 3 = 7	9	6
4	3 + 3 = 6	7 + 4 = 11	16	8
5	6 + 4 = 10	11+ 5 = 16	25	10
6	10 + 5 = 15	16 + 6 = 22	36	12

Fase 3: Porta avant la teua estratègia

En aquesta fase busquem expressions en funció del nombre de rectes, n, per a poder calcular el nombre de punts, segments i regions segons els valors de n.

La fórmula per a les **semirectes** pareix la més fàcil d'obtindre perquè aparentment és el doble que el nombre de rectes i a més cada vegada que afegim una recta tenim 2 semirectes més. Si anomenem SS_n al nombre de semirectes que apareixen amb n rectes tenim que $\mathbf{SS_n = 2n}$.

Per a calcular el nombre de **segments** (incloses les semirectes) que s'obtenen amb n rectes, a partir de les dades de la taula, pareix plausible suggerir que és el quadrat del nombre de rectes, és a dir, si S_n designa al el nombre de segments (els finits i les semirectes) llavors: $\mathbf{S_n = n^2}$.

Per a determinar el nombre de **punts**, a la taula s'observa una llei de recurrència, el nombre de punts, per a qualsevol nombre de rectes, és igual al nombre de punts anterior més el nombre de rectes també de la fila anterior. Si denominem P_n al nombre de punts que es tenen en tallar-se *n rectes* llavors: $\mathbf{P_n = P_{n-1} + n - 1}$

D'altra banda observem que si numerem les rectes amb 1, 2, 3, …, n *i* anomenant els punts pel parell de rectes que determina cada un tenim que són: (1, 2), (1, 3), (1, 4) , … (1, n), (2, 3), (2, 4), … (2, n), (3, 4) …

El nombre d'aquests parells d'elements coincideix amb les combinacions de n elements presos de 2 en 2, és a dir, $\mathbf{P_n} = C_{n,2} = \binom{n}{2}$.

La llei de recurrència que ens suggereix la taula per a obtindre el nombre de **regions** que s'obtenen quan es tallen n rectes, és que el nombre de regions de qualsevol fila de la taula és igual al nombre regions de la fila anterior més el nombre de rectes de la seua fila, per tant si R_n el nombre de regions que s'obtenen en tallar-se n rectes llavors: $\mathbf{R_n = R_{n-1} + n}$.

Per a obtindre una fórmula observem que:

$R_n = 4 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n = 1 + (1 + 2) + (3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n) = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$.

Sumant $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, obtenim que:

$$R_n = 1 + (n+1)\frac{n}{2}$$

i per tant

$$R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$$

o bé

$$R_n = 1 + \frac{(n-1+2)n}{2} = 1 + n + \frac{(n-1)n}{2}$$

i per consegüent

$$R_n = 1 + n + \binom{n}{2}$$

Fase 4: Pensa si és raonable el resultat. Comprova l'estratègia. Generalitza el procés.

En aquesta fase es tracta de justificar o demostrar que totes les conjectures que hem realitzat són certes:

Respecte al nombre de **semirectes** és senzill comprovar que és el doble del nombre de rectes ja que per cada recta tenim dues semirectes, és a dir: $\mathbf{SS_n := 2n}$

El nombre de **segments** és el quadrat del nombre de rectes ja que com en cada una de les rectes hi ha $n-1$ punts tenim n segments (finits i semirectes) i com hi ha n rectes es té que $\mathbf{S_n = n^2}$

Com cada **punt** és la intersecció de dues rectes es té que $\mathbf{P_n} = \binom{n}{2}$,aquesta fórmula compleix la llei de recurrència $\mathbf{P_n = P_{n-1} + n - 1}$. Aplicant les propietats dels nombres combinatoris:

$$P_{n-1} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + n - 1 = \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{2} = P_n$$

Respecte a les **regions** vegem que la hipòtesi $\mathbf{R_n} = 1 + \binom{n+1}{2}$**,** compleix la llei de recurrència:

$$\mathbf{R_n = R_{n-1} + n.}$$

Si $R_n = 1 + \binom{n+1}{2}$**,** llavors $R_{n-1} = 1 + \binom{n}{2}$**,** i per les propietats dels nombres combinatoris:

$$R_{n-1} + n = 1 + \binom{n}{2} + n = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = 1 + \binom{n+1}{2} = R_n$$

En aquesta fase també es pot generalitzar el problema: Què ocorreria si p de les n rectes foren paral·leles? I si q rectes de les n rectes convergeixen en un mateix punt?

Activitats proposades

48. De quantes maneres es poden introduir 7 boles idèntiques en 5 caixes diferents col·locant-les totes si cap caixa pot quedar buida? I si podem deixar alguna caixa buida? Ajuda*:* Ordena les boles en una fila separades per 4 punts així queden dividides en 5 parts, que indiquen les que es col·loquen en cada caixa.

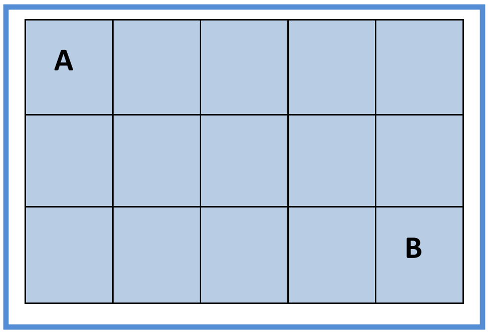
49. Quantes polseres diferents podem formar amb 4 boles blanques i 6 roges? Ajuda*:* Aquest problema és equivalent a introduir 6 boles iguals en 4 caixes idèntiques podent deixar caixes buides.

50. Quantes formes hi ha de col·locar el rei blanc i el rei negre en un tauler d'escacs de manera que no s'ataquen mútuament. I dos alfils? I dues reines?

CURIOSITATS. REVISTA

L'any 1494 apareix la primera obra impresa que té qüestions sobre Combinatòria. És "*Summa*" escrita per Lucca Pacioli. (Et recordes del Nombre d'Or?). Un dels problemes que planteja és el de calcular el nombre de formes distintes en què *n* persones poden assentar-se en una taula redona. Problema que ja hem resolt a l'apartat 4.2.

L'any 1559 va escriure Buteo a França el llibre "*Logística, quae et Aritmètica vulgo dicitur*", un dels primers llibres que tracten sobre Combinatòria. En aquest llibre apareix el problema següent: Un manyà fabrica cadenats formats per 7 discos, i en cada disc hi ha 6 lletres. Quants cadenats és possible fabricar de manera que cada un tinga una combinació diferent per a obrir?



Un gat es troba en A i un ratolí en B. El gat avança de centre de casella en centre de casella movent-se cap a la dreta o cap avall, mai retrocedeix. Quants camins distints pot recórrer el gat per a caçar al ratolí?

"Per aquesta raó d'independència, l'amor a l'estudi és de totes les passions la que més contribueix a la nostra felicitat".

Mme. de Châtelet

RESUM

		Exemples
Permutacions	Es considera només **l'orde**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variacions amb repetició	Es consideren **l'orde** i els **elements**. Els elements poden **repetir-se**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variacions sense repetició	Influeixen **l'orde** i els **elements**. Els elements **NO** poden repetir-se. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinacions	Influeixen només els **elements**. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$
Propietats dels nombres combinatoris	$\binom{m}{0} = 1$; $\binom{m}{m} = 1$; $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$; $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$	$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$; $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$; $\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} = 6 + 4$
Triangle de Tartaglia	$\binom{0}{0}$ $\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$ $\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$ $\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 …
Binomi de Newton	$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Els PowerPoint següents són un bon resum: Variaciones y permutaciones; Combinaciones.

EXERCICIS I PROBLEMES

Permutacions

1. Tres nadadors tiren una carrera. De quantes formes poden arribar a la meta si no hi ha empats? I si són 8 nadadors?

2. Loli, Paco, Anna i Jordi volen fotografiar-se junts, de quantes maneres poden fer-se la fotografia? Volen situar-se de manera que alternen xics amb xiques, de quantes maneres poden ara fer-se la fotografia?

3. De quantes maneres es poden introduir 6 objectes distints en 6 caixes diferents si només es pot posar un objecte en cada caixa?

4. En una parada d'autobús hi ha 5 persones, en quants ordes distints poden haver arribat a la parada? En arribar una nova persona s'aposta amb una altra a què endevina l'orde d'arribada, quina probabilitat té de guanyar?

5. Set xiques participen en una carrera, de quantes formes poden arribar a la meta? No hi ha empats. Quina és la probabilitat d'encertar l'orde d'arribada a la meta?

6. Quants nombres distints i de cinc xifres distintes poden formar-se amb els dígits 3, 4, 5, 6, i 7? Quants poden formar-se si tots comencen per 5? I si han de començar per 5 i acabar en 7?

Variacions

7. Quantes banderes de 3 franges horitzontals de colors distints es poden formar amb els colors roig, groc i morat? I si es disposa de 5 colors? I si es disposa de 5 colors i no cal que les tres franges tinguen colors distints?

8. Quants nombres de 4 xifres distintes es poden escriure amb els dígits: 1, 2, 3, 4, 5 i 6? Quants d'ells són imparells? Quants són múltiples de 4? *Recorda*: Un nombre és múltiple de 4 si el nombre format per les seues dues últimes xifres és múltiple de 4.

9. Quants nombres de 4 xifres, distintes o no, es poden escriure amb els dígits: 1, 2, 3, 4, 5 i 6? Calcula la suma de tots ells. *Suggeriment*: Ordena'ls de menor a major i suma el primer amb l'últim, el segon amb el penúltim, el tercer amb l'antepenúltim i així successivament

10. A Mario li encanta el cine i va a totes les estrenes. Aquesta setmana hi ha sis, i decideix anar cada dia a u. De quantes formes distintes pot ordenar les pel·lícules? Mala sort. Li anuncien un examen i decideix anar al cine només el dimarts, el dijous i el dissabte. Entre quantes pel·lícules pot triar el primer dia? I el segon? I el tercer?

11. Amb els dígits 0, 1, 2, 3, 4, 5, quants nombres de quatre xifres diferents es poden formar? (*Observa:* Si comença per 0 no és un nombre de quatre xifres). Quants són menors de 3000?

12. Amb les lletres de la paraula "ARQUETIPO" Quantes paraules de 6 lletres es poden formar que no tinguen dues vocals ni dues consonants juntes? a) Si totes les lletres són distintes. b) Si es poden repetir lletres.

13. Quants nombres de tres xifres, diferents o no, es poden formar? D'aquests, quants són majors que 123?

14. El llenguatge de l'ordinador està escrit en seqüències de zeros i uns (dígits binaris o bits) de grandària fixa. Al context de la informàtica, aquestes cadenes de bits es denominen paraules. Els ordinadors normalment tenen una grandària de paraula de 8, 16, 32 o 64 bits. El codi ASCII amb el que es representaven inicialment els caràcters per a transmissió telegràfica tenia 7 bits. Després es va aplicar als ordinadors personals, ampliant-ho a 8 bits que és el que es denomina un byte o ASCII estès. Més tard se substituïsc per Unicode, amb una longitud variable de més de 16 bits. Quants bytes diferents (8 dígits) es poden formar? En un ordinador la longitud de paraula del qual tingueren 16 dígits, quantes es podrien formar que anessen diferents? Si existira un ordinador la longitud de paraula del qual tinguera 4 dígits, es podria escriure amb ells les lletres de l'alfabet?

Combinacions

15. Escriu dos nombres combinatoris amb elements diferents que siguen iguals i altres dos que siguen distints.

16. Tens set boles de la mateixa grandària, quatre blanques i tres negres, si les col·loques en fila. De quantes formes pot ordenar-les?

17. Amb 5 llandes de pintura de distints colors, quantes mescles de 3 colors podràs fer?

18. Calcula: a) $\binom{6}{3}$; b) $\binom{8}{5}$; c) $\binom{20}{1}$; d) $\binom{34}{0}$; e) $\binom{47}{47}$.

19. Calcula: a) $C_{9,3}$; b) $C_{10,6}$; c) $C_{8,4}$; d) $C_{20,19}$; e) $C_{47,1}$.

20. De quantes maneres es pot triar una delegació de 4 estudiants d'un grup de 30? I al teu propi grup?

21. Quants productes diferents es poden formar amb els nombres: 2, 1/3, 7, 5 i π prenent-los de 3 en 3? Quants d'aqueixos productes donaran com resultat un nombre enter? Quants un nombre racional no enter? Quants un nombre irracional?

22. Quants aliatges de 3 metalls poden fer-se amb 7 tipus diferents de metall?

23. Quina és la forma més fàcil de calcular $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}$ sense calcular cada un dels nombres combinatoris?

$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

24. De quantes formes pots separar un grup de 10 estudiants en dos grups de 3 i 7 estudiants respectivament?

25. Una assignatura es compon de 20 temes i es va a realitzar un examen en què cauen preguntes de dos temes. Quantes possibilitats hi ha per a triar els temes que cauen? Si només has estudiat 16 temes. Quantes possibilitats hi ha de que et toquen dos temes que no et sàpies? Quina és la probabilitat que et toquen dos temes que no et sàpies? I la de que et toque només un tema que no et sàpies?

26. Un grup de 10 alumnes de 4º d'ESO visitaran un museu en què poden triar entre dues activitats diferents. Quantes formes distintes pot haver de formar els grups d'alumnes?

27. Desenrotlla el binomi a) $(4-x)^5$; b) $(3-2x)^4$; c) $(2ab-3c)^6$; d) $\left(\frac{x}{2}-\sqrt{2x}\right)^3$.

28. Calcula x a les expressions següents:

a) $\binom{6}{4}+\binom{6}{x}=\binom{x+2}{x}$ b) $\binom{10}{x}=\binom{10}{x+2}$

c) $\binom{7}{4}+\binom{7}{x}=\binom{x+3}{x}$ d) $\binom{12}{x}=\binom{12}{x+2}$

29. Escriu el valor de x a les igualtats següents:

a) $\binom{4}{3}=\binom{4}{x}$, $x\neq 3$; b) $\binom{7}{3}=\binom{7}{x}$, $x\neq 3$; c) $\binom{4}{3}=\binom{3}{x}+\binom{3}{2}$;

d) $\binom{2x+1}{5}=\binom{8}{x}+\binom{8}{5}$; e) $\binom{7}{x-3}=\binom{6}{3}+\binom{x}{2}$; f) $\binom{7}{x}=\binom{7}{x+1}$

30. Calcula en funció de n la suma dels següents nombres combinatoris:

a) $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}$ b) $\binom{n}{2}+n$ c) $\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}$

31. Troba el sisè terme al desenrotllament de: $\left(\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10}$

32. Troba el coeficient de x^2 al desenrotllament de: $(-1-5x)^9$.

33. Quantes opcions hi ha per a triar quatre assignatures entre set optatives?

34. Es juga una partida de tir al plat en què es llancen successivament dotze plats. Quin és el nombre de successos en què s'obtenen quatre èxits, és a dir s'encerta quatre vegades en el blanc? Al mateix cas anterior, quina és la probabilitat de tindre èxit a l'últim tir?

Problemes

35. En "Curiositats *i Revista*" tens el problema de *Buteo*. Amb 7 discos i 6 lletres en cada disc, quantes combinacions distintes es poden fer? Ajuda*:* En el primer disc podem posar qualsevol de les 6 lletres. El mateix al segon. I al tercer? Però si és facilíssim! Si ja sabem resoldre'l.

36. En un restaurant hi ha 5 primers plats, 4 segons i 6 postres, de quantes formes diferents es pot combinar el menú?

37. Llancem una moneda i després un dau, Quants resultats distints podem obtindre? I si llancem dues monedes i un dau? I si fossen 3 monedes i 2 daus?

38. S'estan triant els actors i actrius per a fer de protagonistes en una telesèrie. S'han presentat 6 xics i 8 xiques. Quantes parelles distintes podrien formar-se?

39. Una caixa d'un conegut joc educatiu té figures roges, grogues i blaus, que poden ser triangles, cercle o quadrats, i de dos grandàries, grans i xicotetes. De quantes peces consta la caixa?

40. En un restaurant hi ha 8 primers plats i 5 segons, quants tipus de postres ha d'elaborar el restaurant per a poder assegurar un menú diferent els 365 dies de l'any?

41. En una reunió totes les persones se saluden estretint-se la mà. Sabent que va haver-hi 91 salutacions. Quantes persones hi havia? I si va haver-hi 45 salutacions, quantes persones hi havia?

42. De quantes maneres es poden introduir 5 objectes distints en 5 caixes diferents si només es pot posar un objecte en cada caixa? I si es poden posar diversos objectes en cada caixa col·locant tots? Quina és la probabilitat que en la primera caixa no hi haja cap objecte?

43. La major part de les contrasenyes de les targetes de crèdit són nombres de 4 xifres. Quantes possibles contrasenyes podem formar? Quantes tenen algun nombre repetit? Quantes tenen un nombre repetit dues vegades?

44. Tenim 10 rectes al pla que es tallen 2 a 2, és a dir, no hi ha rectes paral·leles. Quants són els punts d'intersecció?, i si tens 15 rectes?, i si tens *n* rectes?

45. Quantes diagonals té un octògon regular?, i un polígon regular de 20 costats?

46. Quantes diagonals té un icosaedre regular?, i un dodecaedre regular? *Ajuda*: Recorda que l'icosaedre i el dodecaedre són poliedres duals, és a dir, el nombre de cares d'un coincideix amb el nombre de vèrtexs de l'altre. Per a saber el nombre d'arestes pots utilitzar la *Relació d'Euler*: C + V = A + 2

47. Quants nombres diferents de 5 xifres distintes pots formar amb els dígits 1, 2, 3, 5 i 7? Quants que siguen múltiples de 5? Quants que comencen per 2? Quants que a més de començar per 2 acaben en 7?

48. Amb 5 boles de 3 colors distints, a) Quantes files diferents pots formar? b) Quantes polseres distintes pots formar?

49. Fa molts anys les plaques de matrícula eren com aquesta: M 677573; després van ser com aquesta: M 1234 AB; i actualment com aquesta: 6068 BPD. Investiga quines avantatges té cada un d'aquests canvis respecte a l'anterior.

50. Amb els dígits 1, 2, 3, 4, 5, quants nombres de cinc xifres distintes es poden formar? Calcula la suma de tots aquests nombres.

51. Calcula *x* als casos següents: a) $V_{x,3} = C_{x,2}$ b) $V_{x,5} = 6\, V_{x,3}$ c) $\frac{C_{x+1,4}}{C_{x,2}} = \frac{7}{3}$

52. Iker i Maria juguen al tenis i decideixen que guanya aquell que primer guanye 3 sets. Quin és el nombre màxim de sets que hauran de disputar? Quants desenrotllaments possibles pot tindre el partit?

53. Pere va conèixer ahir una xica. Ho van passar molt bé i ella li va donar el seu nombre de mòbil, però ell no portava el seu mòbil ni bolígraf. Va pensar que s'acordaria, però… només recorda que començava per 656, que hi havia altres quatre que eren totes distintes entre si i menors que 5. Calcula quantes possibilitats té d'encertar si marca un nombre. Massa. Fa memòria i recorda que les dues últimes són 77. Quantes possibilitats hi ha ara d'encertar fent una telefonada?

54. Un club de muntanyisme ha organitzat una expedició al Kilimanjaro formada per 11 persones, 7 experts i 4 que estan en formació. En un determinat tram només poden anar 3 experts i 2 que no ho siguen, de quantes formes pot estar compost aqueix equip de 5 persones? Tu ets un expert, i aniràs en aqueix tram, quantes formes hi ha ara de compondre'l?

55. En un festival de curtmetratges amb 15 participants, es reparteixen 3000 euros en premis. Indica el nombre de formes diferents de realitzar el repartiment, segons cada una de les tres modalitats proposades.

a. *Modalitat A:* Es reparteixen tres premis de 1000 euros a tres curtmetratges triats per un jurat.

b. Modalitat B: Es realitza una votació i s'entreguen 1500 euros al més votat, 1000 al segon i 500 al tercer.

56. *Modalitat C*: S'entreguen tres premis de 1000 euros cada un en tres categories: millor guió, millor realització i millor interpretació. Nota: Podria ocórrer que un curtmetratge fora el millor en diverses categories.

57. Als bitllets d'una línia d'autobusos van impresos els noms de l'estació de partida i de la d'arribada. Hi ha en total 8 possibles estacions. Quants bitllets diferents hauria d'imprimir l'empresa d'autobusos? Ara volen canviar el format i només imprimir el preu, que és proporcional a la distància. Les distàncies entre les estacions són totes distintes. Quants bitllets diferents hauria d'imprimir en aquest cas?

58. Una parella té un fill de 3 anys que entra en la guarderia a les 9 del matí. El pare treballa en una fàbrica que té 3 torns mensuals rotatius: de 0 a 8, de 8 a 16 i de 16 a 24 hores. La mare treballa en un supermercat que té dos torns rotatius mensuals, de 8 a 14 i de 14 a 20 hores. Quants dies a l'any, generalment, no podrà cap dels dos portar al seu fill a la guarderia?

59. Un tir al blanc té 10 cavallets numerats que giren. Si s'encerta a un d'ells s'encén una llum amb el nombre del cavallet. Tires 3 vegades, de quantes maneres es poden encendre les llums? I si el primer tir no dóna a cap cavallet?

60. En una festa hi ha 7 xiques i 7 xics. Joan balla sempre amb Anna. Antoni és el més decidit i sempre ix a ballar el primer, de quantes formes pot triar parella als pròxims 4 balls?

61. Amb els dígits 0, 1, 2, 3, 4, 5:

a) Quants nombres de cinc xifres es poden formar?
b) Quants hi ha amb dues vegades la xifra 1 i tres la xifra 2?
c) Calcula la suma de tots aquests últims nombres.

62. Quantes paraules, amb sentit o sense, es poden formar amb les lletres de la paraula "puerta" que no tinguen dues vocals ni dues consonants juntes?

63. Quants números capicues de dues xifres existeixen? I de tres xifres? I de quatre xifres?

64. Amb les lletres de la paraula "ARGUMENTO" Quantes paraules de 5 lletres es poden formar que no tinguen dues vocals ni dues consonants juntes? a) Si totes les lletres són distintes. b) Si es poden repetir lletres.

65. Quants nombres hi ha entre el 6 000 i el 9 000 que tinguen totes les seues xifres distintes?

66. Una fàbrica de joguets té a la venda 8 models distints. Quants mostraris distints pot fer de 4 joguets cada un? Quina és la probabilitat que l'últim model d'avió fabricat arribe a un determinat client? Si es vol que en aqueixos mostraris sempre estiga l'últim model de joguet fabricat, quants mostraris distints pot fer ara?

67. La primera obra impresa amb resultats de Combinatòria és “Summa” de *Lucca Pacioli*, de 1494. En aquesta obra es proposa el problema següent: De quantes formes distintes poden assentar-se quatre persones en una taula circular?

68. Quants nombres de quatre xifres tenen almenys un 5?

69. En una companyia militar hi ha 10 soldats, quantes guàrdies de 3 soldats poden fer-se? Un dels soldats és Alexandre, en quantes d’aquestes guàrdies estarà? I en quantes no estarà?

70. L’encarregada d’un guarda-roba s’ha distret, i sap que dels cinc últimes bosses de mà que ha arreplegat a tres bosses de mà els ha posat el resguard equivocat i a dos no. De quantes formes es pot haver produït l’error? I si fossen dos els equivocats?

71. Amb les lletres de la paraula “SABER”, quantes paraules, amb sentit o sense, de lletres diferents, es poden formar que no tinguen dues vocals ni dues consonants juntes. El mateix per a les paraules “CORTE”, “PUERTA” i “ALBERTO”.

72. Amb les lletres de la paraula GRUPO, quantes paraules de 5 lletres amb sentit o sense es poden formar que tinguen alguna lletra repetida?

73. Un jove té al seu armari 10 camisetes, 5 pantalons i tres parells de sabatilles. Sabent que ha de fer l’equipatge per a un campament i només pot ficar a la motxilla quatre camisetes, tres pantalons i dos parells de sabatilles, de quantes maneres diferents podrà omplir la motxilla?

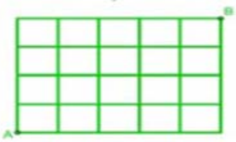
74. Amb els dígits 1, 3 i 5, quants nombres menors de 6 000 es poden formar? Quants hi ha amb 4 xifres que tinguen dues vegades la xifra 5?

75. Camins en una quadrícula:

a) Quants camins hi ha per a anar de A fins a B si només podem anar cap a la dreta i cap amunt?

b) Si no podem travessar el quadrat verd, ni caminar pels seus costats, quantes formes tenim ara per a anar des de A cap a B?

c) Si no podem travessar el rectangle verd, ni caminar pels seus costats, quantes formes tenim ara per a anar des de A cap a B?



Generalització

d) Quants camins hi ha en una quadrícula quadrada amb n quadrats en cada costat?

e) Quants camins hi ha en una quadrícula rectangular amb m quadrats verticals i n horitzontals?

AUTOAVALUACIÓ

1. Tens nou monedes iguals que col·loques en fila. Si quatre mostren la cara i cinc la creu De quantes formes distintes pots ordenar-les?

a) $V_{9,4}$ b) P_9 c) $C_{9,5}$ d) $VR_{9,5}$

2. En una companyia aèria hi ha deu auxiliars de vol, i un avió necessita portar quatre a la seua tripulació, de quantes formes es poden triar?

a) $V_{10,4}$ b) P_{10} c) $C_{10,4}$ d) $VR_{10,4}$

3. Quants productes distints poden obtindre's amb tres factors diferents triats entre els dígits: 2, 3, 5 i 7?

a) $V_{4,3}$ b) P_4 c) $C_{4,3}$ d) $VR_{4,3}$

4. Tenim cinc objectes distints i volem guardar-los en cinc caixes diferents, posant un objecte en cada caixa, de quantes formes podem fer-ho?

a) $V_{5,1}$ b) P_5 c) $C_{5,5}$ d) $VR_{5,1}$

5. Permutacions de *n*+4 elements dividit entre permutacions de *n*+1 elements és igual a:

a) $(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2) = \frac{(n+4)!}{(n+1)!}$ b) $V_{n+4,n+2}$ c) $\frac{(n+4)!}{n!}$ *d)* $V_{n+4,n+2}/ C_{n+4,n+1}$

6. Les variacions de 10 elements presos de 6 en 6 és igual a

a) $VR_{6,10}$ b) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!}$ c) $V_{10,6} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \frac{10!}{4!}$ d) $V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!}$

7. Indica quina afirmació és falsa

a) $0! = 1$ b) $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n)$ c) $VR_{m,n} = m^n$ d) $P_n = n!$

8. El valor dels següents nombres combinatoris $\binom{5}{0}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{4}{1}$ és:

a) 0, 1, i 1 b) 0, 9 i 4 c) 1, 1 i 4 d) 5, 9 i 4

9. El valor de *x*, diferent de 4, a la igualtat $\binom{7}{4} = \binom{7}{x}$ és:

a) 3 b) 7 c) 1 d) 0

10. El coeficient del terme quart del desenrotllament del Binomi de Newton de $(a + b)^7$ és:

a) $\binom{7}{3}$ b) 1 c) $\binom{7}{4}$ d) $V_{7,4}$