Matemàtiques orientades a les ensenyances acadèmiques.

4tB ESO. Capítol 15: Atzar i Probabilitat

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Fernando Blasco

Revisora: Raquel Caro

Il·lustracions: Fernando Blasco, Banc d'Imatges d'INTEF i Wikimedia

Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

(N. del T. en alguns exercicis s'ha respectat la paraula en castellà pels solucionaris)

Índex

1. EXPERIÈNCIA I PROBABILITAT
1.1. LA LLEI DE LAPLACE
1.2. TRAIENT BOLES D'UNA BOSSA
1.3. MESCLANT CARTES
2. APROFUNDINT A LA TEORIA
2.1. COMBINATÒRIA PER A COMPTAR
2.2. NOMENCLATURA EN PROBABILITAT
2.3. NO TOTS ELS SUCCESSOS TENEN LA MATEIXA PROBABILITAT
2.4. ÚS DE DIAGRAMES D'ARBRE
2.5. PROBABILITAT CONDICIONADA
3. CÀLCUL DE PROBABILITATS
3.1. EXEMPLES COMUNS
3.2. COSES SORPRENENTS
3.3. COSES ENCARA MÉS SORPRENENTS

Resum

Tots els dies utilitzem conceptes probabilístics informalment: decidim si emportar-nos abric o no quan eixim al matí de casa, juguem a jocs d'atzar o d'estratègia, llegim estadístiques i sondejos o ens preguntem si hui plourà. No obstant això la nostra intuïció probabilística no està molt desenrotllada. En aquest capítol introduïm algunes regles probabilístiques formals i mostrem com es pot utilitzar la combinatòria o els diagrames d'arbre per a calcular probabilitats. En realitat, l'únic secret consisteix a ser capaços de comptar bé. Amb aquests coneixements no deixarem que altres manipulen estadístiques. El coneixement ens donarà la clau per a prendre decisions pròpies.

També mostrarem alguns exemples que poden parèixer contraris a la nostra intuïció. Hi ha fets que, fent els comptes, resulten molt més probable del que ens pareix a simple vista. Conèixer-los ens ajudarà a distingir altres casos semblants.

1. EXPERIÈNCIA I PROBABILITAT

1.1. La llei de Laplace

Tots els dies estem obligats a calcular probabilitats, encara que siga de manera intuïtiva: guanyarà la Lliga el meu equip favorit?, plourà demà?, li agradaré a aqueixa persona “especial” que hi ha en classe?, em donaran una beca?

A cada succés se li pot assignar una **probabilitat**, que és un nombre comprés entre 0 i 1. Quant major siga la possibilitat que aqueix succés ocórrega, el nombre que indica la probabilitat serà més pròxim a 1 i si tenim poques opcions que ocórrega aqueix fet, la seua probabilitat estarà pròxima a 0.

La nostra experiència (i també la teoria que pots consultar en els Apunts Marea Verda de 3º ESO) ens ajuda a calcular probabilitats mitjançant **la Llei de *Laplace*** al cas en què tots els casos siguen equiprobables (açò és, no hi haja successos simples que tinguen més probabilitat d’eixir que altres).

La regla de *Laplace* està basada en el principi *de raó insuficient*: si a priori no hi ha cap raó per a suposar que un resultat es pot presentar amb més probabilitat que els altres, podem considerar que tots els resultats tenen la mateixa probabilitat d’ocórrer.

$$P(S) = \frac{nombredecasosfavorablesalsuccésS}{nombredecasospossibles}$$

Un poc més avant en aquest capítol tornarem a formalitzar (i ampliar) la matemàtica que hi ha davall del càlcul de probabilitats, però preferim ara mostrar uns quants exemples que ens servisquen per a entrenar la nostra intuïció.

Exemples:

- *En una classe hi ha* 16 *xics i* 17 *xiques. Com no es presenta ningú per a ser delegat es fa un sorteig. Quina és la probabilitat que en la classe haja delegada?*

Com hi ha 17 xiques (els casos favorables) sobre una població de 33 individus, d’acord amb la Llei de *Laplace*, la probabilitat demanada és

$$P(S) = \frac{nombredecasosfavorablesalsuccésS}{nombredecasospossibles} = \frac{17}{33}$$

- En el portamonedes tenim 7 monedes d'1 cèntim, 5 monedes de 5 cèntims, 6 monedes de 10 cèntims i 3 monedes de 50 cèntims. Traiem una moneda a l'atzar, quina és la probabilitat que la quantitat obtinguda siga un nombre parell de cèntims?

En traure una moneda, per a tindre un nombre parell de cèntims ha de ser de 10 c o de 50 c. Per tant el total de casos favorables és de 9 (hi ha 6 de 10 i 3 de 50). El nombre de casos possibles és el de monedes que tenim al portamonedes, que són 7 + 5 + 6 + 3 = 21.

La probabilitat d'obtindre un nombre parell de cèntims és $P(par) = \frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$.

Activitats proposades

1. En una caixa tenim mesclats 25 claus de 2 cm de llarg, 15 claus de 3 cm, 20 claus de 2,5 cm i 40 claus de 3,5 cm. Traiem a l'atzar un clau de la caixa (s'assumeix que tots els claus tenen la mateixa probabilitat de ser triats). Quina probabilitat hi ha de que el clau extret tinga la menor longitud?

2. a) La ruleta francesa consta dels nombres que van del 0 al 36. Si ix 0 guanya la banca. Decidim apostar a "*parell*" (guanyarem si ix un nombre parell no nul). Quina probabilitat tenim de guanyar l'aposta?

b) La ruleta americana consta d'un 0, un 00 i dels nombres que van de l'1 al 36. Si ix 0 o 00 guanya la banca. Decidim apostar a "*parell*" (guanyarem si ix un nombre parell no nul). Quina probabilitat tenim de guanyar l'aposta?

3. En un institut de 800 alumnes hi ha 400 estudiants que parlen anglès, 300 que parlen francès, 100 que parlen alemany, 100 que parlen anglès i francès, 80 que parlen anglès i alemany, 50 que parlen francès i alemany i 30 que parlen els tres idiomes.

Es tria un estudiant a l'atzar. Quina és la probabilitat que parle només una llengua estrangera?

1.2. Traient boles d'una bossa

Una forma senzilla de fer-nos una idea dels conceptes probabilístics és fer *experiments* amb objectes coneguts. Per exemple, són molt típics els problemes en què traiem boles (o caramels, o paperetes, …) d'una bossa.

Exemple:

- *Una bossa conté* 4 boles *blanques,* 2 boles *roges i una bola negra.*

a) S'extrauen dues boles al mateix temps. Quina és la probabilitat que siguen una blanca i una negra?

b) S'extrau una bola de la bossa. Després es trau una segona bola, sense tornar a ficar en la bossa la primera. Quina és la probabilitat que després de la segona extracció tinguem una bola blanca i una bola negra?

c) S'extrau una bola de la bossa. Després es trau una segona bola, sense tornar a ficar en la bossa la primera. Quina és la probabilitat que la primera bola siga blanca i la segona negra?

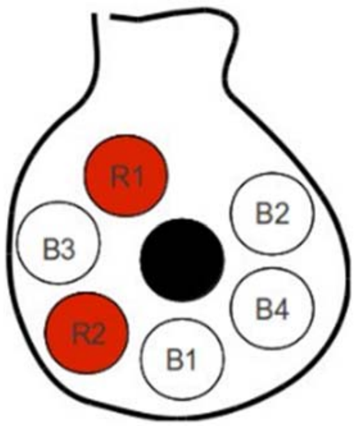
d) S'extrau una bola de la bossa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la bossa de nou. Es trau una segona bola. Quina és la probabilitat que la primera bola siga blanca i la segona negra?

e) S'extrau una bola de la bossa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la bossa de nou. Es trau una segona bola. Quina és la probabilitat que les dues vegades haja eixit la bola negra?

f) S'extrau una bola de la bossa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la bossa de nou. Es trau una segona bola. Quina és la probabilitat que les dues vegades haja eixit una bola blanca?

Hi ha moltes maneres de resoldre aquests exemples. La clau està a comptar bé els casos que apareixen. Emprarem mètodes distints, que desenrotllarem després al llarg del capítol.

a) Encara que no ens diguen res al problema, i encara que les boles siguen indistingibles, imaginarem que cada una té un nombre escrit, com les boles de billar americà. Això ens ajudarà a comptar. Així, la situació és la representada en la figura



Formalment no ens importa en quina orde ixen les boles. En principi agafem les dos al mateix temps.

Els casos favorables són:

Els casos possibles són les combinacions de 7 elements presos de 2 en 2. Açò és,

$$C_{7,2} = \binom{7}{2} = 21$$

Així, la probabilitat demanada és $\frac{4}{21}$.

b) Encara que parega distint per com l'hem enunciat, en aquest exemple preguntem exactament el mateix que a l'exemple (a). En efecte, només ens interessa el que ocorre després de la segona extracció. Així que ja sabem el resultat.

Si volguérem podríem plantejar-lo tenint en compte l'orde en què ixen les boles. En aqueix cas, per a comptar el total de casos possibles haurem d'utilitzar variacions de 7 elements presos de 2 en 2.

Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N, N B1, N B2, N B3, N B4 (es considera orde d'extracció)

Casos possibles: són totes les formes de triar una parella de boles en què sí que importa l'orde d'elecció (primer es trau una i després una altra) $V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$

Així, la probabilitat demanada és $\frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{8}{42} = \frac{4}{21}$

c) Aquest exemple canvia respecte a l'anterior en que sí ens importa l'orde en què ixen les boles.

Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N

Casos possibles $V_{7,2} = 7 \cdot 6 = 42$

Probabilitat = $\frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{4}{42} = \frac{2}{21}$.

d) En aquest exemple els casos favorables són els mateixos que a l'exemple anterior. Però hi ha moltes més possibilitats, ja que tornem a introduir en la bossa la bola que hem tret a la primera extracció. Per a comptar el nombre de casos possibles s'utilitzen les *variacions amb repetició.*

Casos favorables: B1 N, B2 N, B3 N, B4 N

Casos possibles: $VR_{7,2} = 7^2 = 49$

Probabilitat = $\frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{4}{49}$.

e) En aquest exemple hi ha un únic cas favorable: que isca la bola negra 2 vegades. El nombre de casos possibles és el que hem calculat a l'exemple anterior, ja que realitzem dues extraccions i ens importa l'orde.

Casos favorables: N N

Casos possibles: $VR_{7,2} = 7^2 = 49$

Probabilitat = $\frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{1}{49}$

f) En aquesta ocasió tornem a tindre el mateix nombre de casos possibles que als dos exemples anteriors. El que canvia és el mode de comptar el nombre de casos favorables. Podem fer-ho sense pensar o bé utilitzant combinatòria, que per a això l'hem estudiada.

Els casos possibles són B1 B1, B1 B2, B1 B3, B1 B4, B2 B1, B2 B2, B2 B3, B2 B4, B3 B1, B3 B2, B3 B3, B3 B4, B4 B1, B4 B2, B4 B3, B4 B4. És a dir, 16 casos.

Els podríem haver calculat d'una forma molt més senzilla tenint en compte que hi ha 4 boles blanques i s'extrauen, amb reemplaçament, 2 vegades. Això dóna lloc a un problema típic de variacions amb repetició.

Casos favorables: $VR_{4,2} = 4^2 = 16$

Casos possibles: $VR_{7,2} = 7^2 = 49$

Probabilitat = $\frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{16}{49}$

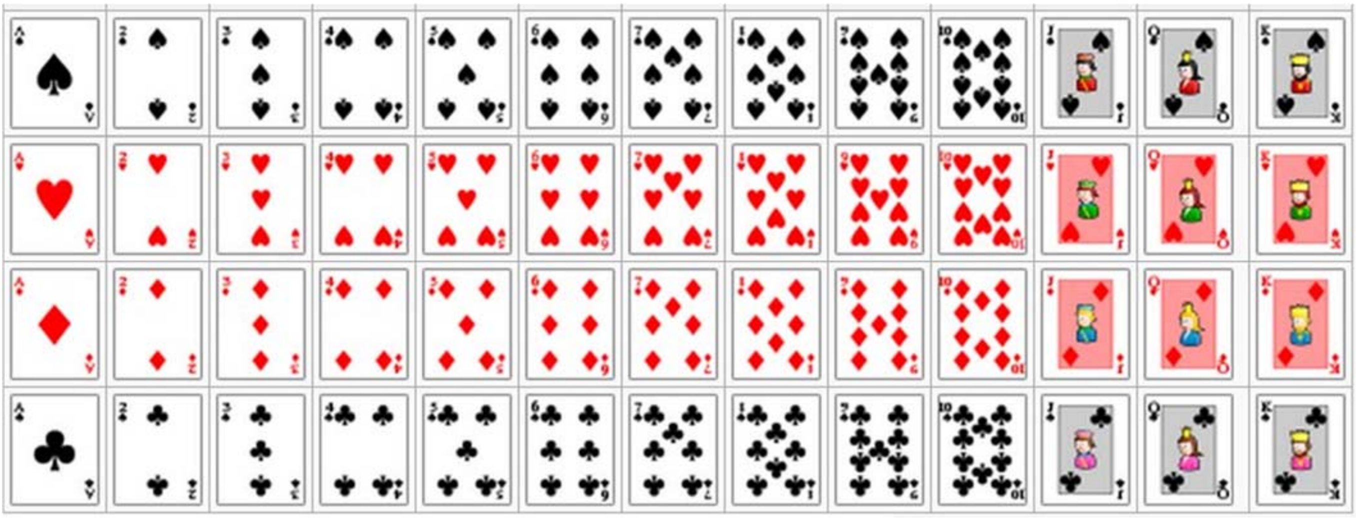
Activitats proposades

4. Torna a fer tots els apartats de l'exemple anterior però substituint en cada cas "bola blanca" per "bola roja".

5. A la loteria primitiva una aposta consisteix a marcar 6 caselles d'entre 49 possibles. El dia del sorteig s'extrauen 6 boles (d'entre 49). Quina és la probabilitat que la teua aposta coincidisca amb la combinació guanyadora? Quina és la probabilitat que encertes 5 nombres? I la de que encertes 4 nombres?

1.3. Mesclant cartes

En una baralla americana tenim 4 colls: piques, cors, trèvols i diamants. Les cartes de piques i de trèvols són negres, mentres que els diamants i els cors són cartes roges. Cada pal té 13 cartes, de les que hi ha cartes amb nombres de l'1 al 10 i 3 figures: la sota (J), la dama (Q) i el rei (K). A la baralla francesa (original, però menys vista) en compte d'aparèixer J, Q, K apareixen V, D, R (del francès Valet, Dame i Roi). A més, la baralla en té 2 comodins, però no els utilitzarem als nostres exemples.



Les mescles de cartes tenen propietats molt interessants. De fet hi ha molts jocs de cartomàgia que es basen en propietats matemàtiques de les mescles (i no precisament probabilístiques). Als exemples que veurem a continuació suposarem sempre que treballem amb una baralla ben mesclada i l'extracció de les cartes es farà sempre de forma aleatòria.

Exemples:

- *Es reparteixen a l'atzar* 5 cartes *d'una baralla de pòquer. Quina és la probabilitat que tingues* 4 cartes *del mateix valor?* (aqueixa és la jugada que s'anomena *pòquer*).

No ens importa l'orde, amb la qual cosa el nombre de mans possibles es calcula mitjançant combinacions. Açò és,

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = 2\,598960.$$

Per a comptar el nombre de casos favorables pensarem, de moment, en un poc més concret: quantes possibilitats hi ha d'obtindre un *pòquer d'asos.*

La mà que ens interessa és A A A A * , on * pot ser qualsevol carta. Hi ha 12 possibilitats per a açò. En efecte, l'única elecció possible és la carta que acompanya als asos.

Així, com tenim 13 possibles valors (de l'As al 10 i les 3 figures) hi ha, 13 ·12 = 156 casos favorables. Amb això, la probabilitat demanada és

$$P(pòquer) = \frac{casosfavorables}{casospossibles} = \frac{156}{2598960} = \frac{39}{649740}$$

- *Una jugada de* 5 *cartes s'anomena full si en ella hi ha* 3 *cartes d'un valor i altres* 2 *d'un valor distint. Quina és la probabilitat d'aconseguir un full d'Asos i Dosos, açò és, AAA 22?*

Els casos possibles són els mateixos d'abans: el nombre de possibles jugades de 5 cartes.

Per a aconseguir AAA tenim 4 cartes (els 4 asos) dels que hem de triar 3. Es calculen amb combinacions.

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4.$$

Per a aconseguir els dosos hem de triar 2 dosos d'entre 4. Tornem a utilitzar combinacions.

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6.$$

Combinant les 4 possibilitats que tenim per a aconseguir els 3 asos i les 6 possibilitats que tenim per a aconseguir els 2 dosos, ens queda un total de 24 formes d'aconseguir aqueix full d'Asos i Dosos.

Així,

$$P(AAA22) = \frac{casos favorables}{casospossibles} = \frac{24}{2598960} = \frac{1}{108290}$$

- *Quina és la probabilitat d'aconseguir un full (independentment de la seua composició)?*

A l'exemple anterior hem calculat la probabilitat d'aconseguir un full concret: el full AAA22.

Però per a aconseguir un full arbitrari tenim 13 possibilitats d'elecció per a les 3 cartes del mateix valor i 12 per a triar les altres 2 cartes (clar, ja no podem usar el valor que hem triat per al trio). Així, hi ha 13 · 12 possibilitats d'aconseguir un full concret.

Com un full fixat es podia obtindre de 24 formes diferents (ho hem calculat a l'exemple anterior), el total de casos favorables és

Casos favorables = 13 · 12 · 24 = 3744.

I així

$$P(full) = \frac{3744}{2598960} = \frac{78}{54145}.$$

Activitats proposades

6. a) S'anomena *trio* a la jugada que consisteix en 3 cartes del mateix valor i altres dos de diferent valor al d'aqueixes 3 i a més amb diferents valors entre si. Calcula la probabilitat d'obtindre un trio *d'asos* en una jugada de 5 cartes.

b) Calcula la probabilitat d'obtindre un *trio* qualsevol.

7. a) S'anomena escala *de color* a una jugada composta per 5 cartes del mateix pal ordenades consecutivament. Calcula la probabilitat d'obtindre aquesta escala *de color*:

b) Calcula la probabilitat d'obtindre una escala *de color* qualsevol.

8. S'anomena *color* a una jugada composta per 5 cartes del mateix pal que no són consecutives. Calcula la probabilitat d'obtindre *color* en una jugada.

2. APROFUNDINT A LA TEORIA

2.1. Combinatòria per a poder comptar

Els exemples que hem fet al principi del capítol mostren l'important que és el domini de la combinatòria per a comptar els casos favorables i els casos possibles que tenim. A manera de recordatori, incloem un quadre extret del resum del capítol anterior:

Permutacions	Influeix només **l'orde**. $P_n = n!$	$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Variacions amb repetició	Influeix **l'orde** i els **elements**. Els elements poden **repetir-se**. $VR_{m,n} = m^n$.	$VR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$
Variacions sense repetició	Influeix **l'orde** i els **elements**. Els elements NO poden repetir-se. $V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$V_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6!}{3!} = 120$
Combinacions	Influeixen només els **elements**. $C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \binom{m}{n}$	$C_{9,7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = 36$

2.2. Nomenclatura en probabilitat

És molt important anomenar a cada cosa pel seu nom. La precisió i el llenguatge en Matemàtiques poden convertir en senzill una cosa que, en principi, podria parèixer molt complicada.

Un **experiment aleatori** és una acció (experiment) el resultat de la qual depèn de l'atzar.

A cada un dels resultats possibles d'un experiment aleatori li anomenarem **cas** o **succés elemental**.

El conjunt de tots els casos possibles s'anomena **espai mostral** o **succés segur**.

Un **succés** és un subconjunt de l'espai mostral.

Si S és un succés es verifica el **succés contrari** de S sempre que no es verifica S. El representarem per S^C.

Es diu que dos successos són **successos independents** si que es verifique un d'ells no afecta la probabilitat de verificació de l'altre.

Exemple:

- *Experiments aleatoris:*

  a) Triar una persona a l'atzar i veure en quin dia de la setmana ha nascut.

  b) Traure una carta de la baralla de pòquer i veure de quin pal és.

  c) Llançar un dau de parxís i observar el nombre de la cara superior.

  d) Llançar 3 monedes a l'aire i observar la posició en què cauen.

- *Espais mostrals*. Per als experiments de l'exemple anterior els espais mostrals són, respectivament:

  a) {dilluns, dimarts, dimecres, dijous, divendres, dissabte, diumenge}

  b) {piques, cors, trèvols, diamants}

  c) {1, 2, 3, 4, 5, 6}

  d) {CCC, CCX, CXX, XXX}

- *Successos contraris*. Usarem els experiments (a), (b), (c), (d) d'aquest exemple.

a) El succés contrari a "un dia del cap de setmana" és {dilluns, dimarts, dimecres, dijous, divendres}

b) El succés contrari a "carta roja" és {piques, trèvols}

c) El succés contrari a "nombre múltiple de 3" és {1, 2, 4, 5}

d) El succés contrari a "ixen les 3 cares" és {CCX, CXX, XXX}

- *Successos independents*. Usarem els experiments (a), (b), (c), (d) d'aquest exemple.

a) Els successos "haver nascut en cap de setmana" i "haver nascut en dilluns" són independents. Els successos "haver nascut en cap de setmana" i "haver nascut en diumenge" són dependents.

b) Els successos "obtindre una carta roja" i "obtindre una carta de piques" són independents. Els successos "obtindre una carta roja" i "obtindre una carta de cors" són dependents.

c) Els successos "obtindre un nombre parell" i "obtindre un 5" són independents. Els successos "obtindre un nombre parell" i "obtindre un 6" són dependents.

d) Els successos "obtindre tres cares" i "obtindre tres creus" són independents. Els successos "Obtindre tres resultats iguals" i "obtindre tres creus" són dependents.

Com la unió d'un succés i el seu **succés contrari** és el succés segur, es té que

$$P(S^C) = 1 - P(S).$$

Quan dos successos són independents, la probabilitat que es done el **succés intersecció** (açò és, que es verifiquen ambdós successos al mateix temps) és el producte de les probabilitats de cada un d'ells

Si A i B són **independents**,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Activitats proposades

9. Es consideren els següents experiments aleatoris:

1) Es tenen 5 fitxes de Scrabble formant la paraula CASAS. Es fiquen en una bossa i s'extrauen 3 fitxes.
2) Es mescla una baralla de pòquer, es talla i es mira el valor de la carta superior.
3) Un portamonedes conté 4 monedes de 5 cèntims, 2 monedes de 10 cèntims i 1 moneda de 20 cm. S'extrauen a l'atzar dues monedes d'ell.
4) Dels 30 alumnes d'una classe es tria un a l'atzar. Se li pregunta en quin mes ha nascut.

a) Descriu els espais mostrals de cada un dels 4 experiments aleatoris anteriors.

b) Indica els successos contraris a
   1. {AAC}
   2. {A, 2, 3, 4, 5}
   3. Traure una quantitat parell de cèntims.
   4. Haver nascut en un mes en què segur que és estiu.

a) Són independents aquests parells de successos?
   1. {AAC} i {{ASA}, {CAS}}
   2. "Obtindre un 6" i "obtindre un nombre parell"
   3. "Obtindre una quantitat parell de cèntims" i "traure dues monedes de 5 cèntims"
   4. "Haver nascut en un mes que segur és d'estiu" i "haver nascut al juny"

El llenguatge és molt important a l'hora de **comprendre** què ens estan demanant en cada cas.

2.3. No tots els successos tenen la mateixa probabilitat

Hi ha casos en què intuïm perfectament que no tots els successos tenen la mateixa probabilitat. Per exemple, si llancem un dau, la probabilitat d'obtindre un nombre parell és 1/2 mentres que la d'obtindre un múltiple de 3 és 1/3.

Altres vegades ens pot costar més.

Exemple

- *Considera l'experiment aleatori "mesclar una baralla, tallar i mirar el color de les dues cartes que han quedat dalt".*

  a) Si escrivim l'espai mostral veurem que és {RR, RN, NN}. Clar: o bé les dues cartes són roges, o bé les dos són negres, o bé hi ha una de cada color.

  b) Però… i si haguérem escrit el color de cada carta, per orde d'aparició? En aquesta situació, els casos possibles serien {RR, RN, NR, NN}.

Com el llenguatge que utilitzem és imperfecte, per a un mateix experiment podem considerar dos espais mostrals distints. No hi ha problema en això sempre que sapiem què ens estan preguntant i què hem de fer.

En realitat, el RN que hem escrit en (a) es correspon amb els casos RN i NR de (b).

Treballant amb l'espai mostral de (b) tots els casos són equiprobables mentres que si treballem amb l'espai mostral de (a) els successos RR i NN tenen probabilitat 1/4 mentres que RN té probabilitat 1/3.

Activitats resoltes

- *Es tenen* 5 *fitxes de Scrabble formant la paraula* CASAS. *Es fiquen en una bossa i s'extrauen* 3 *fitxes. Dóna dos casos que siguen equiprobables i altres dos que no ho siguen.*

Són equiprobables {AAC} i {SSC}. No són equiprobables {AAC} i {CAS}.

- *Es mescla una baralla de pòquer, es talla i es sumen els valors de les dues cartes superiors* (assumim A = 1, J = 11, Q = 12, K = 13). Dóna *dos casos que siguen equiprobables i altres dos que no ho siguen.*

  En aquest exemple l'espai mostral és {2, 3, ….., 26} (els nombres que poden obtindre's en sumar els valors de les dues cartes).

  Són casos equipobables {2} i {26} o {3} i {25}. No són equiprobables {2} i {3}.

- *Dels 30 alumnes d'una classe es tria un a l'atzar. Se li pregunta en quin mes ha nascut. Dóna dos casos que siguen equiprobables i dos que no ho siguen.*

L'espai mostral és {gener, febrer, …, novembre, desembre}. En realitat no tots aquests casos són equiprobables. Per a saber-lo hem d'aproximar la probabilitat mitjançant la freqüència relativa i per a això és necessària l'estadística. L'any 2012 les dades de naixements a Espanya, per mesos es reflecteixen en aquesta taula:

gener	febrer	març	abril	maig	juny	juliol	agost	sept	octubre	nov	des
11.765	10.967	11.776	11.329	11.954	11.314	11.874	12.031	11.672	12.324	11.510	11.318

2.4. Ús de diagrames d'arbre

Ja s'ha utilitzat la representació en diagrama d'arbre per a generar variacions, combinacions o permutacions. Aqueix mateix tipus d'estructura és també útil quan cal calcular probabilitats.

Exemple

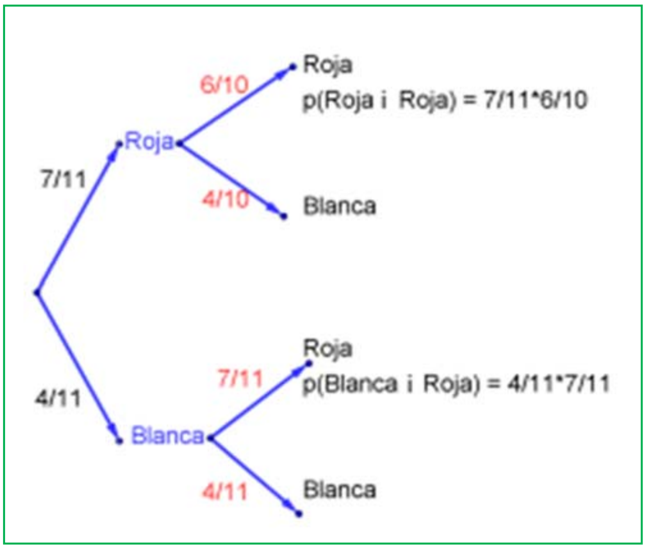
- *Tenim una caixa amb 7 boles roges i 4 boles blanques. Es trau una bola a l'atzar. Si és blanca es torna a ficar a la caixa. Si és roja es deixa fora. En aquestes condicions es trau una altra bola de la caixa. Quina probabilitat hi ha de que aquesta bola siga roja?*

Poden ocórrer dues coses: que la bola de la primera extracció siga roja o que siga blanca.

1.- Si la bola treta és roja (ocorre amb probabilitat 7/11) la bola quedarà fora i la composició de la caixa just abans de la segona extracció és de 6 boles roges i 4 boles blanques.

La probabilitat que en aquest moment de traure una bola roja és de 6/10.

2.- Si la bola treta és blanca (ocorre amb probabilitat 4/11), la bola es torna a ficar a la caixa i la composició d'aquesta abans de la segona extracció serà la mateixa que al principi. Així, la probabilitat que a la segona extracció isca una bola roja és de 7/11.

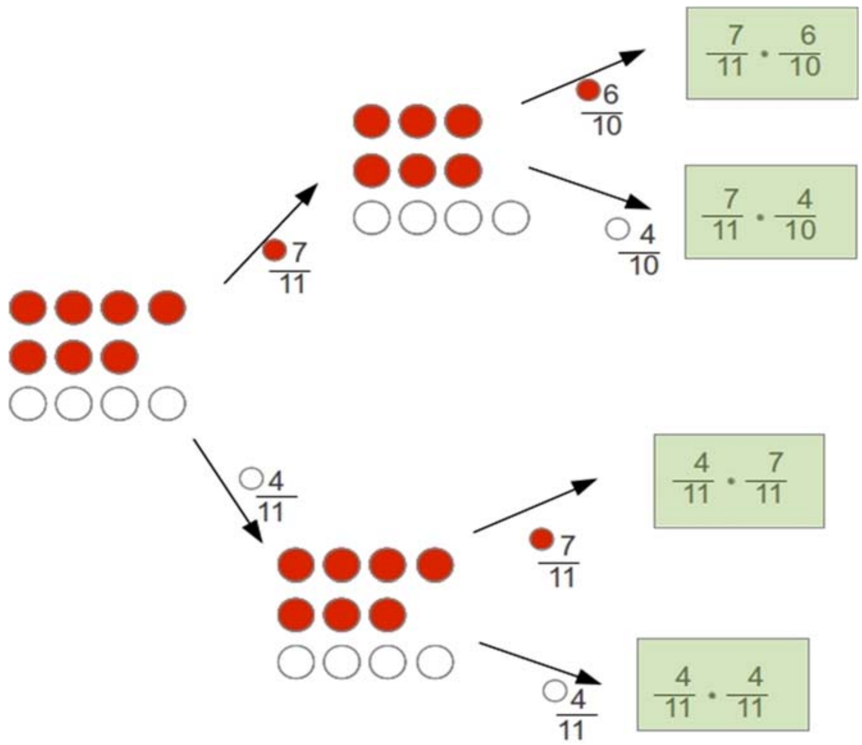


Es pot arribar a obtindre una bola roja a la segona extracció per dues vies: depenent del color de la bola que s'ha tret a la primera extracció.

La **probabilitat total** de què isca una bola roja a la segona extracció és:

$$P(roja) = \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{11} = \frac{411}{605}$$

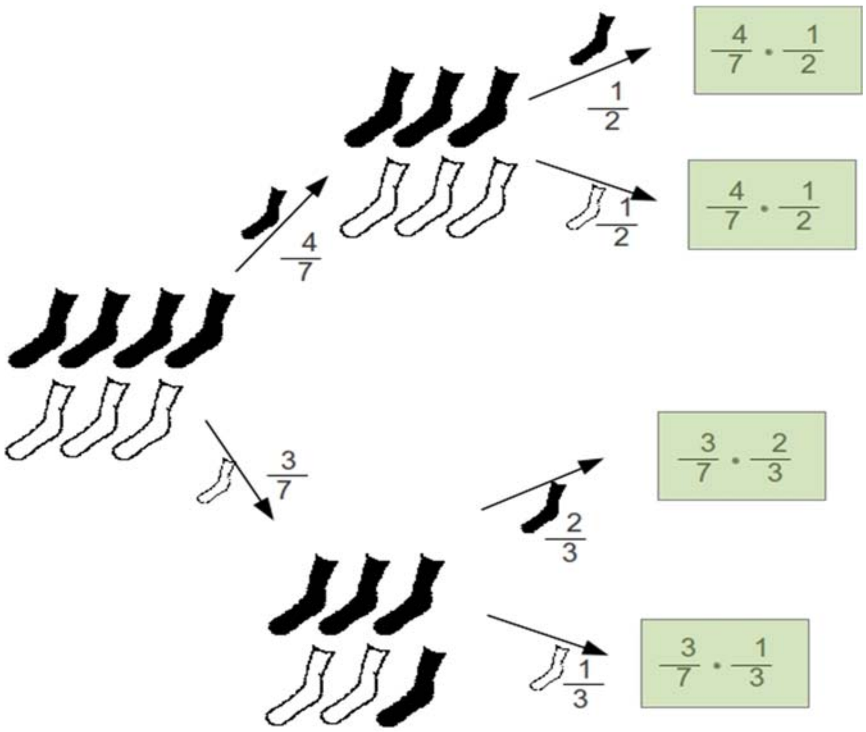
Tot aquest procés se sol resumir i simplificar utilitzant un **diagrama d’arbre:**



Activitat resolta

- *En un calaix tenim* 7 calcetins*:* 4 *negres i* 3 *blancs. Traiem, sense mirar, dos calcetins del calaix. Què és més probable, que siguen ambdós del mateix color o que siguen de colors distints?*

Farem un diagrama d’arbre calculant la probabilitat de cada cas.



La probabilitat que obtinguem dos calcetins negres és 2/7, de que obtinguem 2 calcetins blancs és 1/7. Així tenim que la probabilitat d'obtindre dos del mateix color és 3/7, enfront de la probabilitat d'obtindre dos de colors distints, que és 4/7.

És més probable traure un parell de calcetins de colors distints.

Observació

També podríem haver resolt aquest problema mitjançant la *Llei de Laplace*.

Casos possibles: $C_{7,2} = \binom{7}{2} = 21.$

Casos favorables a traure 2 calcetins negres: $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6.$

Casos favorables a traure 2 calcetins blancs: $C_{3,2} = \binom{3}{2} = 3.$

Casos favorables: 6 + 3 = 9.

Probabilitat $= \frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$

Com traure un calcetí de cada color és el succés contrari a aquest, la seua probabilitat és $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$. És més probable aquest cas.

Recorda que els problemes de Matemàtiques es poden abordar des de diferents punts de vista. L'important és que sigues capaç de resoldre'ls. Per això és important conèixer més d'un mètode. En unes ocasions serà millor utilitzar un i en altres serà millor usar un mètode alternatiu. Per això has d'estudiar diverses "ferramentes" que t'ajuden a resoldre els problemes que apareixen.

Activitats proposades

10. Elabora un arbre de probabilitats per a calcular la probabilitat d'obtindre *doble parella* en una jugada de 5 cartes de pòquer. (*Doble parella* consisteix en 2 parells de cartes del mateix valor, diferents entre si, i una carta indiferent, de valor diferent dels dos anteriors. Per exemple, AA 33 Q).

11. Al portamonedes tinc 3 monedes d'un cèntim, 2 de 5 cèntims, 3 de 10 cèntims, 1 de 20 i 1 de 50 cèntims. Trac 3 monedes a l'atzar. Quina és la probabilitat que obtinga un nombre parell de cèntims?

2.5. Probabilitat condicionada

Als casos de diagrames d'arbre, en cada pas apareixen probabilitats que estan condicionades a un pas anterior. A l'exemple de la secció 2.4 la probabilitat que a la segona extracció la bola siga roja condicionada a què a la primera extracció havia eixit una bola roja era 6/10, mentres que la probabilitat de traure una bola roja a la segona extracció, sabent que a la primera havia eixit una bola blanca era 7/11.

En molts casos la probabilitat que cal determinar és una **probabilitat condicionada** a la verificació d'un succés anterior.

La probabilitat de verificació del succés A condicionada a la verificació del succés B es representa per *P*(*A/B*).

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemples

- *Al llançament d'un dau ha eixit un nombre parell. Calcula la probabilitat que siga un* 6.

No cal formalitzar açò així, però per a acostumar-nos a la notació donarem noms als successos que intervenen:

A = Obtindre un 6 = {6}

B = Obtindre nombre parell = {2, 4, 6}

Els casos possibles són {2, 4, 6} (perquè ens diuen que ha eixit un número parell)

L'únic cas favorable és { 6}

Així doncs

P(traure 6 condicionat *a parell*) = $\frac{casosfavorables}{casospossibles} = \frac{1}{3}$

També podríem haver calculat açò amb àlgebra de successos:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

- El 40 % de la població fuma, i el 10 % fuma i és hipertens. Quina és la probabilitat que un fumador siga hipertens?

Assumirem que els percentatges de població es corresponen amb probabilitats. Així, la probabilitat de que un individu triat a l'atzar siga fumador és 0,4 i la probabilitat que siga fumador i hipertens és 0,1. D'aquesta manera

A = Ser fumador i hipertens

B = Ser fumador

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Com $P(A) = 0,1 \neq P(A/B) = 0,25$ els successos "*ser fumador*" i "*ser hipertens*" són successos dependents.

Activitats proposades

12. Un analista esportiu, que s'equivoca el 20 % de les vegades, ha dit que el nostre equip favorit guanyarà la lliga. L'analista de la competència, que s'equivoca el 25 % de les vegades, ha dit que el nostre equip favorit no guanyarà la lliga. Segons eixos comentaris. Quina probabilitat hi ha de que el nostre equip guanye la lliga?

13. Una companyia de productes avícoles empaqueta dotzenes d'ous en tres llocs diferents. El 40 % de la producció té lloc en la planta A, el 25 % en B i la resta en C. Un control de qualitat ens diu que un 5% dels paquets elaborats en A, un 10 % dels de B i un 8 % dels de C contenen algun ou esclafat. Quina probabilitat hi ha de que ens toque una dotzena d'ous amb algun ou esclafat?

14. En un institut amb 300 alumnes s'està estudiant si la qualificació obtinguda en *Castellà* té a veure amb la qualificació obtinguda en *Matemàtiques*. Després de fer una enquesta, s'obtenen els resultats següents:

		Matemàtiques		
		Excel·lent	**Notable**	**Un altre**
Castellà	**Excel·lent**	110	25	18
	Notable	40	70	40
	Un altre	10	5	2

Es tria un alumne a l'atzar. Quina és la probabilitat que haja tingut un excel·lent en *Castellà*, si l'ha tingut en *Matemàtiques*?

Quina és la probabilitat que haja tingut un excel·lent en *Matemàtiques*, si l'ha tingut en *Castellà*?

Autor: Fernando Blasco
Traducció: Pedro Podadera. Instituto Juan de Garay de Valencia

3. CÀLCUL DE PROBABILITATS

3.1. Exemples comuns

Activitats resoltes

- En un calaix tinc un parell de calcetins rojos, un parell de calcetins negres i un parell de calcetins blancs. En fer la maleta, amb les presses, agarre 3 calcetins sense mirar. Quina probabilitat tinc d'haver agafat 2 del mateix color?

Agafaré 2 del mateix color sempre que no agarre els 3 de colors diferents.

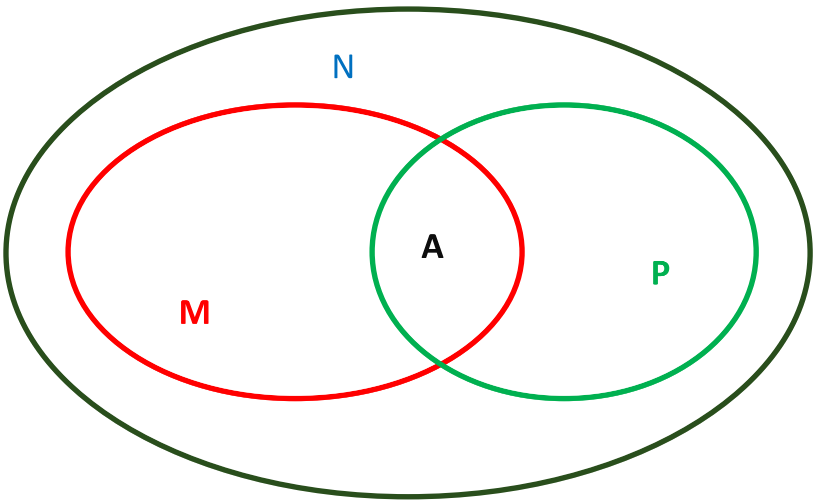
Em dóna igual el color del primer que trac. Per al segon em serveixen 2 d'entre 5. I en la tercera extracció, com necessite un color diferent, em serveixen 2 d'entre 4.

Així la probabilitat del succés contrari és $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{5}$.

Per això la probabilitat demanada és $\frac{4}{5}$.

- Es fa un estudi de consum en una població. Es descobreix que al 80 % de les persones a qui els agrada el gelat de pistatxo també els agrada el de mango i que al 80 % de les persones a qui els agrada el gelat de mango també els agrada el de pistatxo. Al 60 % d'aqueixa població no li agraden els gelats de mango ni de pistatxo. Es tria a l'atzar una persona d'aqueixa població. Quina és la probabilitat que li agrade tant el gelat de mango com el de pistatxo?

Calcularem els percentatges de la població a qui li agrada el gelat de mango i de pistatxo. Representarem totes les dades amb diagrames de Venn.



Considerem

M = Percentatge de persones a qui els agrada el gelat de mango

P = Percentatge de persones a qui els agrada el gelat de pistatxo

A = Percentatge de persones a qui els agraden ambdós gelats (pistatxo i mango)

N = Percentatge de persones a qui no els agrada ni el gelat de pistatxo ni el de mango

Sabem que A = 0,8 · P i també que A = 0,8 · M. Per tant, M = P.

Ara podem referir tot a X, el nombre total d'individus de la població.

El nombre de persones a qui els agrada almenys un d'aqueixos tipus de gelat és:

M + P – A = 2M – 0,8M = 1,2M

Però sabem que això coincideix amb el 60 % de la població. Així 1,2M = 0,4$X \Rightarrow$ M = $\frac{4}{5}X$

I, finalment, $A = 0{,}8 \cdot \frac{1}{3}X = \frac{4}{15}X$.

Amb el que la probabilitat que a la persona triada a l'atzar no li agrade ni el gelat de pistatxo ni el de mango és:

$$P = \frac{casos favorables}{casos possibles} = \frac{\frac{4}{15}X}{X} = \frac{4}{15}$$

- *En la loteria primitiva s'aposten* 6 *nombres d'entre* 49. *Jugant una sola aposta, quina és la probabilitat que et toque un premi de* 5 *encerts més complementari?*

El nombre de casos possibles són les combinacions de 49 elements presos de 6 en 6: $C_{49,6}$.

Els casos favorables han d'incloure necessàriament al *nombre complementari*. Les altres 5 posicions s'han d'omplir amb 5 dels 6 elements de la combinació guanyadora. Així, el nombre de casos favorables ve donat per les combinacions de 6 elements presos de 5 en 5: $C_{6,5}$.

Així, .$P(5 + complementari) = \frac{C_{6,5}}{C_{49,6}} = \frac{6}{13983816} = \frac{1}{2330636}$

- *En un IES hi ha Batxillerat diürn i Batxillerat nocturn. En diürn estudien* 2/3 *dels alumnes i el terç restant ho fa en nocturn. La quarta part dels alumnes de nocturn i la cinquena dels de diürn utilitza un mitjà de transport per a anar a l'institut. La resta arriba caminant. Es tria a l'atzar un estudiant d'aqueix institut. Quina probabilitat hi ha de que vaja a classe caminant?*

2/3 Diürn
  4/5 Caminant
  1/5 Transport

1/3
  3/4 Caminant
  1/4 Transport

La probabilitat que un alumne acudisca a classe caminant és $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{47}{60}$.

- Després de tornar de Dublín, al portamonedes tenim 6 monedes d'euro procedents d'Espanya i 9 d'Irlanda. Hem de pagar 3 euros. Quina probabilitat hi ha de fer-ho amb monedes del mateix país?

Tenim 6 monedes d'euro d'Espanya, 9 d'Irlanda.

Hem de prendre 3 monedes a l'atzar.

Els casos possibles són les combinacions de 15 elements presos de 3 en 3. $C_{15,3} = 455.$

Els casos favorables provenen d'agafar les 3 monedes espanyoles o les tres irlandeses. Així resulta:

$$C_{6,3} + C_{9,3} = 20 + 84 = 104.$$

Per tant, la probabilitat demanada és $\frac{104}{455}$.

- Un tafur juga amb una baralla trucada de 48 cartes. Trau una carta, la mira, la torna a ficar a la baralla i mescla. Repeteix aquest procediment altres 2 vegades més. La baralla està preparada de tal manera que el fet d'una de les tres cartes vistes siga una figura té una probabilitat de 19/27 Quantes figures té la seua baralla?

Anomenarem *x* al nombre de figures que hi ha a la baralla trucada. La probabilitat de no obtindre figura a la primera carta és $\frac{48-x}{48}$, la de no obtindre a la segona torna a ser la mateixa probabilitat i el mateix amb la tercera. Així la probabilitat de no obtindre cap figura és $\left(\frac{48-x}{48}\right)^3$.

Com *no obtindre cap figura* és el succés contrari *d'obtindre alguna figura*, la seua probabilitat és:

P(*no obtindre cap figura*) = 1 – P(obtindre *figura*) = $1-\frac{19}{27}=\frac{8}{27}.$

Així hem arribat a l'equació $\left(\frac{48-x}{48}\right)^3 = \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3}$

D'on

$\frac{48-x}{48} = \frac{2}{3}$, aïllant en aqueixa equació resulta x = 16.

Activitats proposades

15. Una bossa conté 9 boles roges i 6 boles negres. S'extrau a l'atzar una d'elles i se substitueix per dos de l'altre color. Després d'això s'extrau una segona bola. Quina probabilitat hi ha de que la segona bola siga roja? Quina probabilitat hi ha de que la segona bola siga del mateix color que la primera?

16. Al menjador escolar la probabilitat que no hi haja pasta una setmana és 1/3; la probabilitat que hi haja pollastre és 3/5 i la probabilitat que hi haja pasta i pollastre és 4/7. Calcula la probabilitat que no hi haja ni pasta ni pollastre. Calcula la probabilitat que no hi haja pollastre sabent que hi ha hagut pasta.

17. Tenim a la butxaca monedes procedents de 3 països: espanyoles (60 %), franceses (30 %) i alemanyes (la resta). El 30 % de les monedes espanyoles i el 20 % de les franceses són de 50 cèntims. També sabem que del total de monedes, el 30 % són de 50 cèntims. S'extrau una moneda a l'atzar. Quina probabilitat hi ha de que siga una moneda francesa de 50 cèntims? Quina probabilitat hi ha de que siga una moneda de 50 cèntims, sabent que és alemanya?

18. En una classe hi ha 24 alumnes i 16 alumnes. Es formen equips de treball de 5 persones. Calcula la probabilitat de formar un equip en les condicions següents:

a) tots els participants són del mateix sexe.

b) a l'equip hi ha almenys 3 xiques.

c) a l'equip hi ha exactament 3 xiques.

d) a l'equip hi ha 3 estudiants d'un sexe i 2 d'un altre.

3.2. Coses sorprenents

Portem tot el capítol insistint en el fet que no tenim prou desenrotllat el sentit de la probabilitat. És necessari educar la intuïció en aquest sentit. Per això hi ha fets que sent totalment explicables des de les Matemàtiques, ens continuen pareixent paradoxals. Comentarem breument tres exemples.

Activitats resoltes

- *Encara que parega una casualitat, per tindre l'any 365 dies, és molt probable que en la teua classe hi haja 2 alumnes que celebren el seu aniversari el mateix dia. Ho has comprovat?*

La probabilitat que això ocórrega en un grup de 23 persones la probabilitat és 1/2. En un grup de 30 persones la probabilitat és major de 0,7 i en un grup de 40 persones és 0,89.

Com podem calcular-ho?

Més fàcil que calcular la probabilitat que hi haja una coincidència és calcular la probabilitat del succés contrari: que no hi haja coincidències.

Suposarem en aquest exemple que hi ha la mateixa probabilitat d'haver nascut en un dia o en un altre (encara que sapiem que, en realitat, no és així).

➢ Suposem que tenim 2 persones. La primera haurà nascut un dia. Perquè no coincidisca la data de naixement de la segona tenim 364 possibilitats d'elecció. Així la probabilitat que no hi haja una coincidència en un grup de 2 persones és $\frac{364}{365}$.

- Si ara tenim 3 persones i no volem que hi haja coincidències, hi ha 364 possibilitats per a triar la segona persona i 363 per a triar la tercera. Així aquesta probabilitat és:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}$$

- Anàlogament, la probabilitat que en un grup de 4 persones no hi haja coincidències és:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}$$

- Seguint amb aquest raonament, arribem que la probabilitat que en un grup de 23 persones no hi haja coincidències és:

$$\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdots\frac{344}{365}\cdot\frac{343}{365}=0{,}4927$$

22 factores

Així que, la de que hi haja coincidències és 1 – 0,4927 = 0,5073, major del 50 %!

Per als altres casos que hem comentat, pots fer tu els càlculs. Són semblants a què acabem de fer.

Activitats resoltes

L'Administració Pública acostuma a sortejar la lletra del cognom per la qual es començarà un procés. Pot ser l'orde d'actuació dels concursants a una oposició, al segle passat per a sortejar excedents de quota del servei militar, adjudicació de vivendes protegides o per a adjudicar places en un col·legi.

A pesar que els matemàtics insistim en el fet que aqueixos sortejos no són justos, ja que no tracten tots els individus per igual, l'Administració els continua realitzant (i inclús arriba a la testarrudesa defenent la seua equanimitat). Efectivament, els casos de l'espai mostral no són equiprobables.

Suposem que entre les jugadores de la Selecció Femenina de Bàsquet, que va guanyar l'Eurobasket 2013, se sorteja quina d'elles puja a arreplegar la copa, i es fa sortejant una de les 27 lletres de l'alfabet espanyol.

Cognom	Lletres amb les que guanyarà
Aguilar	yza
Domínguez	bcd
Gil	efg
Lima	hijkl
Nicholls	mn
Ouviña	o
Palau	pp
Queralt	r
Sancho	rs
Torrens	t
Valdemoro	uv
Xargay	xx

Veiem que Cindy Llima tindria una probabilitat de 5/27 de pujar a arreplegar la copa, enfront 1/27 d'Ouviña, Palau, Queralt, Torrens o Xargay.

Tristament aquest sistema es continua utilitzant. Inclús l'ha usat la Comunitat de Madrid per a assignar places en col·legis per al curs 2014/2015.

Activitat proposada

19. Suposa que se sorteja ser delegat de la teua classe pel mètode descrit abans. Qui tindria més probabilitat d'eixir? Hi ha algú que no tindria cap possibilitat? Fes-ho amb una llista de la teua classe.

3.3. Coses encara més sorprenents

Activitat proposada

20. Pren 2 cartolines de colors, cada una d'un color distint (per exemple, roja i blau) i retalla en cada una d'elles 3 rectangles de la mateixa grandària. Apega aqueixos rectangles entre si de manera que un siga roig-roig, un altre blau-blau i un altre roig-blau. Fica les 3 cartolines així preparades en un sobre i trau una a l'atzar, amb atenció de no mostrar ni més menys que un costat. Pregunta a un company que "*endevine*" el color de la cara que està oculta. Repeteix el procés amb tots els companys. Escriu els resultats de l'experiment en una taula com aquesta que copies en el teu quadern:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Ocult																														
Aposta																														
Ix																														
encerta?																														

Què observes? És millor dir que el color ocult és el mateix que el visible? O és pitjor?

Exemples

1.- La paradoxa de *Bertrand*.

En 1889 *Joseph Bertrand* va proposar l'experiment següent: tenim tres caixes en què hem introduït en una, una moneda de plata i una bronze, en una altra dues monedes de plata i en una altra dues monedes de bronze. Les monedes de plata i bronze són indistingibles al tacte. Es tria una caixa a l'atzar i es trau una moneda d'una d'ella. Es veu que la moneda és de plata. De quin material creus que és l'altra moneda de la caixa, plata o bronze?

En principi pensem que com veiem una moneda de plata, pot tractar-se de la caixa que conté dues monedes de plata o la que té una de cada tipus. Per això, ens inclinem a pensar que la probabilitat que l'altra moneda siga de plata o de bronze és la mateixa: 1/2.

Si pensem un poc més veurem que aquest problema és, en realitat, equivalent a l'activitat proposada amb la que hem començat aquesta secció. En compte de tindre cartolines amb colors diferents tenim caixes amb monedes de materials diferents. Les matemàtiques del problema són les mateixes en els dos casos. Així que, si has fet l'activitat anterior, ara tindràs arguments per a decidir que el més probable és que l'altra moneda de la caixa siga de plata.

En efecte, el que es tria a l'atzar és la caixa. La probabilitat d'haver triat una caixa amb dues monedes iguals és 2/3, mentres que la probabilitat de triar la caixa que té una moneda de cada tipus és només 1/3. Per això el més probable és que hagem triat una caixa amb les dues monedes iguals. Com veiem que una és de plata el millor que podem dir és que l'altra també ho és.

Aquest és un exemple típic de probabilitat condicionada, encara que no ho pareix.

2.- El problema de *Monty Hall*.

Monty Hall era el presentador del concurs de la televisió americana *Let's have a deal!* En aqueix concurs hi havia un premi final on es mostraven tres portes. Darrere d'una d'elles hi havia un cotxe i en cada una de les altres dos hi havia una cabra. Clar, els concursants el que volien era emportar-se el cotxe.

Monty Hall procedia sempre de la mateixa manera:

- deia al concursant que triara una porta: la A, la B o la C
- una vegada triada la porta pel concursant obria una de les que no havia triat i mostrava que darrere d'ella hi havia una cabra
- li donava al concursant l'oportunitat de canviar la seua elecció o mantindre's amb el que havia triat al principi

(Incís abans de continuar llegint: tu què faries?, canviaries?, mantindries la teua elecció?, dóna igual?, és millor una cosa que l'altra?)

Com ensenya una porta amb una cabra, el cotxe està o en la que tria el concursant o en l'altra, en principi al 50 %. En realitat la probabilitat no és del 50 %, com veurem ara.

Marilyn vos Savant és una persona que presumia (i es guanyava la vida utilitzant-ho) de tindre el rècord *Guinness* de quocient intel·lectual. Escrivia una columna en la revista *Parade* i en ella va dir que la millor estratègia era canviar l'elecció després que *Monty Hall* mostrara la cabra. Després de la publicació d'aquesta columna nombrosos matemàtics van escriure a la revista queixant-se de l'error. Per a tots era obvi que la probabilitat d'encert, tant si canviava l'elecció com si no ho feia, era 1/2.

La polèmica la va concloure *Paul Erdös* (un matemàtic hongarès un poc rar, que no tenia un domicili fix, ni un treball estable, però que va publicar un muntó de resultats matemàtics) donant raó a *vos Savant*, per a sorpresa de molts. Sí, alguns matemàtics (inclús alguns importants) s'havien equivocat en calcular probabilitats. No passa res, tots cometem errors.

Tornem al problema. Veuràs què simple és el raonament. En realitat hi ha 3 casos: "tries la porta del cotxe" "tries la de la cabra 1" o "tries la de la cabra 2". L'important és que realitzes aquesta elecció ABANS de que *Monty Hall* t'ensenye res.

- Suposem que has triat la porta amb el cotxe. *Monty Hall* t'ensenyarà la cabra 1 o la cabra 2. Si canvies perds. Si no canvies ganes.
- Suposem que tries la porta amb la cabra 1. *Monty Hall* t'ensenyarà la cabra 2. Si canvies ganes: només queda la porta que oculta al cotxe. Si no canvies perds.
- Suposem que tries la porta amb la cabra 2. *Monty Hall* t'ensenyarà la cabra 1. Si canvies ganes: només queda la porta que oculta al cotxe. Si no canvies perds.

Així, canviant la teua elecció després que *Monty Hall* òbriga la porta guanyaràs 2 de cada 3 vegades. Sorprès?

CURIOSITATS. REVISTA

Pascal i Fermat

Blaise Pascal (1623-1662) i Pierre de Fermat (1601-1655) van mantindre una interessant correspondència durant l'any 1654 que es podrien considerar l'inici de la Teoria de la Probabilitat a pesar de tractar-se de problemes de jocs i apostes. Són problemes proposats pel Cavaller de la Mérè que no era matemàtic.

U és aquest:

Un jugador aposta una bossa de monedes a què saca almenys un 6 en 8 llançaments d'un dau. Ha tirat ja el dau 3 vegades sense traure cap 6, i decideix deixar el joc, quina part de la bossa li correspondria?

Tu saps resoldre-ho. Fes un diagrama en arbre, i calcula en primer lloc la probabilitat que té el jugador de guanyar i la de que té de perdre en un principi.

Cada tirada és un succés independent (no depèn del que s'haja obtingut en les anteriors, així que segons Fermat si el jugador renúncia a una jugada té dret a 1/6 de la bossa.

Si renúncia a 2 llançaments llavors ha de ser indemnitzat amb 1/6 + 5/36.

La ruleta

William Jaggers va arribar a Montecarlo amb uns pocs francs a la butxaca i, durant un mes va anotar els nombres que eixien en cada ruleta, i en quatre dies va guanyar dos milions quatre-cents mil francs. *Jaggers* va aconseguir trencar la banca a *Montecarlo* analitzant les freqüències relatives de cada nombre de la ruleta i observant que s'havia desgastat quelcom del mecanisme d'una d'elles, amb la qual cosa tots els valors no tenien la mateixa probabilitat. Va apostar als nombres més probables i va guanyar.

Cavaller de la Meré

Al *Cavaller de la Meré* li agradava jugar i era un gran jugador, per això sabia que era favorable apostar, en tirar un dau "traure almenys un 6 en 4 tirades d'un dau" i que no ho era en tirar dos daus el "traure almenys un 6 doble en 24 jugades".

Es veu que havia jugat molt per a saber que les freqüències relatives li deien que el primer succés tenia una probabilitat superior a 0,5, i el segon la tenia inferior. Però no ho comprenia. No era matemàtic i només se sabia la regla de tres. Açò no és una proporcionalitat! Va dir 6 : 4 = 36 : 24. Però les freqüències relatives li deien que no era així, per la qual cosa va escriure a Pascal perquè li solucionara el problema.

Tu ja saps el suficient per a solucionar-li'l. Abans de continuar llegint, tracta de resoldre'l.

En lloc de calcular la probabilitat de *traure al menys un 6* en 4 *tirades*, calcula la probabilitat de *no traure un 6*, que és el seu succés contrari, i és $\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Per tant la probabilitat de *traure al menys un 6* en 4 *tirades* és:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177 > 0.5.$$

Calculem de la mateixa manera la probabilitat de traure *al menys un sis doble* al llançar dos daus 24 vegades, calculant la del seu succés contrari, la de *no traure cap sis doble*: $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, per tant traure al menys un 6 doble és:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.4914 < 0.5.$$

Quant degué de jugar el Cavaller de la Meré per a donar-se compte de eixa xicoteta diferència en les probabilitats!

Si vols saber més, busca:

http://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdfhttp://www.miscelaneamatematica.org/Misc34/caballero.pdf

L'inici de la Teoria de la Probabilitat, com ja saps, van ser els jocs d'atzar.

Galileo,

Al segle XVI va plantejar el problema següent: En tirar tres daus, per què és més probable obtindre que la suma de les cares superiors siga 10, que siga 9?

Continuava la reflexió amb les possibles descomposicions en aqueixes sumes:

9 = 3 + 3 + 3	10 = 4 + 3 + 3
9 = 4 + 3 + 2	10 = 4 + 4 + 2
9 = 4 + 4 + 1	10 = 5 + 3 + 2
9 = 5 + 2 + 2	10 = 5 + 4 + 1
9 = 5 + 3 + 1	10 = 6 + 2 + 2
9 = 6 + 2 + 2	10 = 6 + 3 + 1

En ambdós casos hi ha 6 descomposicions possibles, no obstant això, tirant moltes vegades els 3 daus comprovava que és més probable traure un 10.

Si fas un diagrama en arbre comprovaràs que totes aqueixes descomposicions no són igualment probable.

Per exemple: (3, 3, 3) té una probabilitat d'1/216, mentres que la suma 6 + 2 + 2, pot eixir amb tres successos (6, 2, 2), (2, 6, 2) i (2, 2, 6), després la seua probabilitat és 3/216.

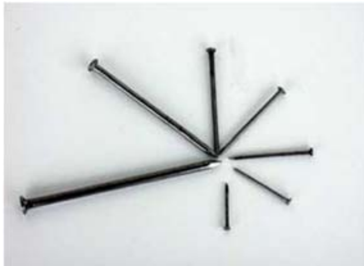
Calcula les probabilitats de cada una de les sumes i la de traure 10 i de traure 9.

RESUM

Experiment aleatori	El resultat depèn de l'atzar	Llançar una moneda, o un dau
Succés elemental	Cada un dels possibles resultats d'un experiment aleatori	Cara o creu serien successos elementals a l'experiment "llançar una moneda i observar el resultat"
Espai mostral	Conjunt de casos possibles	{cara, creu} {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Succés	Subconjunt de l'espai mostral	{2, 4, 6}
Llei de *Laplace*	Si els successos elementals són equiprobables llavors : $P(S) = \frac{nombredecasosfavorablesalsuccésS}{nombredecasospossibles}$	En llançar un dau: *P*(traure 3) = 1/6 P(traure múltiple de 2) = 3/6.
Combinatòria	Utilitza la combinatòria (combinacions, variacions, variacions amb repetició...) per a comptar bé els casos favorables i els possibles	La probabilitat de tindre pòquer en una baralla francesa és: $P(pòquer) = \frac{13 \cdot 12}{C_{52,2}}$
Diagrama en arbre	Problemes molt difícils pots resoldre'ls representant un diagrama en arbre	
Succés contrari	El succés contrari de S (S^c) es verifica si no es verifica S. $P(S^C) = 1 – P(S)$	Succés contrari de traure parell és {1, 3, 5} = 1 – 3/6 = 1/2.
Successos independents	Dos successos són independents si la probabilitat que es verifique un no queda afectada per que s'haja verificat l'altre.	La probabilitat de traure un 3, en tirar un dau i tornar a tirar-lo.
Intersecció de successos	Si A i B són independents $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. En general $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$	En una baralla espanyola la probabilitat de traure dos asos és (4/40) · (3/39)
Probabilitat condicionada	$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	Probabilitat de traure un as havent-hi ja tret un altre as sense reemplaçament és 3/39
Unió de successos	Si A i B són incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ En general $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$	En una baralla espanyola la probabilitat de traure un as o bé un or és (4/40)+ (10/49)–(1/40)= = 13/40

EXERCICIS I PROBLEMES

1. En una classe hi ha 15 xics i 18 xiques. Com no es presenta ningú per a ser delegat es fa un sorteig. Quina és la probabilitat que a la classe haja delegada?
2. En el portamonedes tenim 8 monedes d'1 cèntim, 3 monedes de 5 cèntims, 8 monedes de 10 cèntims i 5 monedes de 50 cèntims. Traiem una moneda a l'atzar, quina és la probabilitat que la quantitat obtinguda siga un nombre parell de cèntims?



3. En una caixa tenim mesclats 50 claus de 2 cm de llarg, 30 claus de 3 cm, 35 claus de 2,5 cm i 60 claus de 3,5 cm. Traiem a l'atzar un clau de la caixa (s'assumeix que tots els claus tenen la mateixa probabilitat de ser triats). Quina probabilitat hi ha de que el clau extret tinga la menor longitud?
4. En un institut de mil estudiants hi ha 700 que parlen anglès, 400 que parlen francès, 50 que parlen alemany, 200 que parlen anglès i francès, 30 que parlen anglès i alemany, 10 que parlen francès i alemany i 5 que parlen els tres idiomes. Es tria un estudiant a l'atzar. Quina és la probabilitat que parle només una llengua estrangera?

5. La ruleta francesa consta dels nombres que van del 0 al 36. Si ix 0 guanya la banca. Decidim apostar a "parell" (guanyarem si ix un nombre parell no nul). Quina probabilitat tenim de guanyar l'aposta? I si apostem a 7? I si apostem a un nombre imparell?
6. Una bossa conté 7 boles blanques, 5 boles roges i 3 boles negres. S'extrauen dues boles al mateix temps. Quina és la probabilitat que siguen una blanca i una negra?
7. Una bossa conté 10 boles blanques, 9 boles roges i una bola negra. S'extrau una bola de la bossa. Després es trau una segona bola, sense tornar a ficar en la bossa la primera. Quina és la probabilitat que després de la segona extracció tinguem una bola blanca i una bola negra?
8. Una bossa conté 15 boles blanques, 4 boles roges i una bola negra. S'extrau una bola de la bossa. Després es trau una segona bola, sense tornar a ficar en la bossa la primera. Quina és la probabilitat que la primera bola siga blanca i la segona negra?
9. Una bossa conté 15 boles blanques, 4 boles roges i una bola negra. S'extrau una bola de la bossa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la bossa de nou. Es trau una segona bola. Quina és la probabilitat que la primera bola siga blanca i la segona negra?
10. Una bossa conté 15 boles blanques, 4 boles roges i una bola negra. S'extrau una bola de la bossa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la bossa de nou. Es trau una segona bola. Quina és la probabilitat que les dues vegades haja eixit la bola negra?
11. Una bossa conté 15 boles blanques, 4 boles roges i una bola negra. S'extrau una bola de la bossa. Després de mirar de quin color s'introdueix en la bossa de nou. Es trau una segona bola. Quina és la probabilitat que les dues vegades haja eixit una bola blanca?
12. A la loteria primitiva una aposta consisteix a marcar 6 caselles d'entre 49 possibles. El dia del sorteig s'extrauen 6 boles d'entre 49. Quina és la probabilitat que la teua aposta coincidisca amb la combinació guanyadora? Quina és la probabilitat que encertes un nombre? I la de que encertes 2 nombres?

13. Es reparteixen a l’atzar 5 cartes d’una baralla espanyola. Quina és la probabilitat que tingues 4 cartes del mateix nombre?

14. En una jugada es reparteixen 5 cartes. Quina és la probabilitat d’aconseguir tres asos i dos reis? Quina és la probabilitat de tindre tres cartes iguals? I una parella? I de tindre tres cartes iguals i les altres dos també iguals entre si?

15. En una jugada es reparteixen 5 cartes. S’anomena *escala de color* a una jugada composta per 5 cartes del mateix pal ordenades consecutivament. Calcula la probabilitat d’obtindre aquesta escala de color de trèvols.

16. En una jugada es reparteixen 5 cartes. S’anomena *color* a una jugada composta per 5 cartes del mateix pal que no són consecutives. Calcula la probabilitat d’obtindre *color* de trèvols.

17. Considera l’experiment aleatori “mesclar una baralla, tallar i mirar el color de les dues cartes que han quedat dalt”. Quina és la probabilitat que ambdues tinguen el mateix color?

18. Tenim una caixa amb 12 boles roges i 8 boles blanques. Es trau una bola a l’atzar. Si és blanca es torna a ficar a la caixa. Si és roja es deixa fora. En aquestes condicions es trau una altra bola de la caixa. Quina probabilitat hi ha de que aquesta bola siga roja?

19. En un calaix tenim 10 calcetins: 6 negres i 4 blancs. Traiem, sense mirar, dos calcetins del calaix. Què és més probable, que siguen ambdós del mateix color o que siguen de colors distints?

20. Elabora un arbre de probabilitats per a calcular la probabilitat d’obtindre *doble parella* d’asos i tresos en una jugada de 5 cartes de pòquer. (*Doble parella* consisteix en 2 parells de cartes del mateix valor, diferents entre si, i una carta indiferent, de valor diferent dels dos anteriors. Per exemple, AA 33 Q).

21. En el portamonedes tinc 7 monedes d’un cèntim, 4 de 5 cèntims, 6 de 10 cèntims, 5 de 20 i 7 de 50 cèntims. Trac 3 monedes a l’atzar. Quina és la probabilitat que obtinga un nombre imparell de cèntims?

22. El 60 % d’una determinada població fuma, i el 12 % fuma i és hipertens. Utilitza aquestes freqüències per a obtindre probabilitats i determina si ser hipertens és dependent o independent de fumar. Quina és la probabilitat condicionada de què una persona fumadora siga hipertensa?

23. Un analista esportiu, que s’equivoca el 10 % de les vegades, ha dit que el nostre equip favorit guanyarà la lliga. L’analista de la competència, que s’equivoca el 20 % de les vegades, ha dit que el nostre equip favorit no guanyarà la lliga. Segons eixos anàlisis. Quina probabilitat hi ha de que el nostre equip guanye la lliga?

24. Una companyia de productes avícoles empaqueta dotzenes d’ous en tres llocs diferents. El 60 % de la producció té lloc a la planta A, el 30 % a B i la resta a C. Un control de qualitat ens diu que un 5 % dels paquets elaborats a A, un 7 % dels de B i un 10 % dels de C contenen algun ou esclafat. Quina probabilitat hi ha de que ens toque una dotzena d’ous amb algun ou esclafat?

25. En un calaix tinc un parell de calcetins rojos, un parell de calcetins negres i un parell de calcetins blancs. En fer la maleta, amb les presses, agarre 3 calcetins sense mirar. Quina probabilitat tinc d’haver agafat 2 del mateix color?

26. Es fa un estudi de consum en una població. Es descobreix que al 70 % de les persones a qui els agrada la melmelada de taronja també els agrada la de grosella i que al 80 % de les persones a qui els agrada la melmelada de grosella també els agrada la de taronja. Al 40 % d'aqueixa població no li agraden ni la melmelada de taronja ni la de grosella. Es tria a l'atzar una persona d'aqueixa població. Quina és la probabilitat que li agrade tant ambdues melmelades?

27. A la loteria primitiva s'aposten 6 nombres d'entre 49. Jugant a dues apostes, quina és la probabilitat que et toque un premi de 5 encerts més el complementari?

28. En un institut hi ha Batxillerat i Formació Professional. En Batxillerat estudien 1/3 dels estudiants i la resta ho fa en Formació Professional. La quarta part dels estudiants de Batxillerat i la sisena part dels Formació Professional utilitza un mitjà de transport per a anar a l'institut. La resta arriba caminant. Es tria a l'atzar un estudiant d'aqueix institut. Quina probabilitat hi ha de que vaja a classe utilitzant un mitjà de transport?

29. Un tafur juga amb una baralla trucada de 40 cartes. Trau una carta, la mira, la torna a ficar en la baralla i mescla. Repeteix aquest procediment altres 2 vegades més. La baralla està preparada de tal manera que el fet d'una de les tres cartes vistes siga una figura té una probabilitat de 19/27 Quantes figures té la seua baralla?

30. Una bossa conté 10 boles roges i 5 boles negres. S'extrau a l'atzar una d'elles i se substitueix per dos de l'altre color. Després d'això s'extrau una segona bola. Quina probabilitat hi ha de que la segona bola siga negra? Quina probabilitat hi ha de que la segona bola siga del mateix color que la primera?

31. Al menjador escolar la probabilitat que no hi haja creïlles una setmana és 1/5; la probabilitat que hi haja peix és 2/5 i la probabilitat que hi haja creïlles i peix és 1/10. Calcula la probabilitat que no hi haja ni creïlles ni peix. Calcula la probabilitat que no hi haja peix sabent que hi ha hagut creïlles.

32. En una classe hi ha 20 alumnes i 10 alumnes. Es formen equips de treball de 6 persones. Calcula la probabilitat de formar un equip: a) amb tot xiques, b) amb 3 xiques, c) amb tot xics, d) amb almenys 3 xiques.

33. Encara que parega una casualitat, per tindre l'any 365 dies, és molt probable que en una classe de 35 alumnes hi haja dos que celebren el seu aniversari el mateix dia. Calcula la dita probabilitat. El mateix si la classe té 20 estudiants.

34. Utilitza la taula per a obtindre una taula de contingència sobre els accidents de trànsit:

	En carretera (C)	En zona urbana (U)	Total
Amb víctimes (V)	34092	32295	66387
Només danys materials (D)	11712	20791	32503
Total	45804	53086	98890

Calcula P(V); P(D); P(C); P(U); P(V $\cap$ C); P(D $\cap$ U); P(U/V); P(V/U); P(V/C); P(C/V); P(C/D). Se sap que hi ha hagut un accident en carretera, quina és la probabilitat que haja tingut víctimes? Són independents els successos d'accident amb víctimes i accident en carretera?

35. Es realitzen estudis sobre una determinada malaltia i es coneix que la probabilitat que una persona la tinga és de 0,04. Una determinada prova detecta si una persona està malalta amb una probabilitat de 0,97, però també qualifica com a malalta, de vegades, a una persona sana amb una probabilitat de 0,01. Representa aquesta situació en un diagrama en arbre. Construeix la taula de contingència associada. Calcula la probabilitat que una persona sana siga detectada com a malalta.

36. En el control de qualitat d'un procés de fabricació se sap que la probabilitat que un circuit siga defectuós és 0,02. Un dispositiu per a detectar els defectuosos té una probabilitat de detectar-los de 0,9, però també qualifica com defectuosos a 0,03 dels correctes. Representa aquesta situació en un diagrama en arbre. Construeix la taula de contingència associada. Calcula la probabilitat que un circuit defectuós siga qualificat com correcte.

37. En una classe hi ha 25 xiques i 15 xics, i se sap que el 80 % de les xiques aproven les matemàtiques mentres que les aproven el 60 % dels xics. Utilitza aquests percentatges per a assignar probabilitats i calcula la probabilitat que hi ha en triar una persona de la classe a l'atzar que:

a) Siga xica i aprove les matemàtiques;

b) Siga xica o aprove les matemàtiques;

c) Siga xic i suspenga matemàtiques;

d) Haja aprovat les matemàtiques.

38. S'estudien les famílies de tres fills. Per a simplificar fem la hipòtesi que la probabilitat de xic siga igual a la de xica. Calcula la probabilitat dels successos següents:

a) A = El primer fill és xica.
b) B = Almenys hi ha un xic.
c) A $\cup$ B,
d) A $\cap$ B.

39. En una bossa hi ha 3 boles verdes, 4 boles roges i una bola blanca. Traiem dues boles de la bossa. Calcula la probabilitat dels successos: A = "alguna de les boles és verd", B = "ha eixit la bola blanca". Calcula també: P(A^c), P(B^c), P(A $\cup$ B) i P(A^c $\cap$ B). Són A i B successos incompatibles? Són successos independents?

40. Donats els successos A i B de probabilitats: P(A^c) = 3/5; P(A $\cap$ B) = 1/8; P(B $\cup$ A) = 3/4; calcula les probabilitats següents: P(A); P(B); P(B^c); P(B/A^c); P(A^c $\cap$ B^c); P(A/B). Són A i B successos independents?

41. Determina si són compatibles o incompatibles els successos A i B tals que:

a) $P(A) = 1/7$; $P(B) = 3/7$; $P(B \cup A) = 4/7$;

b) $P(A) = 1/5$; $P(B) = 0$;

42. Donats els successos A i B de probabilitats: $P(A^c) = 2/5$; $P(B) = 3/5$; $P(A^c \cap B^c) = 1/5$; calcula les probabilitats següents: $P(A)$; $P(B^c)$; $P(B \cup A)$; $P(B/A^c)$; $P(A \cap B)$; $P(A/B)$. Són A i B successos independents?

43. Dos tiradors al plat tenen unes marques ja conegudes. El primer encerta amb una probabilitat de 0,8 i el segon de 0,6. Es llança un plat i ambdós disparen. Expressa mitjançant un diagrama d'arbre i la taula de contingència associada les distintes possibilitats. Calcula: a) Quina probabilitat hi ha de que almenys un dels tiradors done al plat? b) Probabilitat que cap encerte? c) Sabem que el tir ha encertat al blanc, quina és la probabilitat que ho haja fet el primer tirador?

44. Es disposa de dues urnes A i B. L'urna A té 7 boles verdes i 3 grogues. L'urna B té 5 boles verdes i 7 grogues. Es trau una bola a l'atzar d'una de les dues urnes, també a l'atzar, i resulta ser groga. Calcula la probabilitat que siga de l'urna B. (*Ajuda*: Representa les possibilitats mitjançant un diagrama en arbre, escriu la taula de contingència associada i l'altre diagrama en arbre).

45. Se sap que en una certa població, la probabilitat de ser home i daltònic és un desè i la probabilitat de ser dona i daltònica és 1/20. La proporció de persones d'ambdós sexes és la mateixa. Es tria una persona a l'atzar.

a) Trobar la probabilitat que no siga daltònic.

b) Si la persona triada és dona, trobar la probabilitat que siga daltònica.

c) Quina és la probabilitat que la persona triada patisca daltonisme?

46. En un cert institut s'ofereix informàtica i teatre com a assignatures optatives. El grup A consta de 32 estudiants i el B té 30 estudiants. El 70 % del grup A ha triat teatre, així com el 40 % del grup B i el 60% de la resta del grup B ha triat informàtica.

a) Si es pregunta a un estudiant triat a l'atzar, trobar la probabilitat que haja triat informàtica.

b) Si un estudiant ha triat teatre, calcula la probabilitat que pertanya al grup B.

47. En una baralla espanyola de quaranta cartes s'han eliminat diverses cartes. Se sap que la probabilitat d'extraure un as entre les que queden 0,1, la probabilitat que isca una copa és 0,07 i la probabilitat que no siga ni as ni copa és 0,8.

a) Trobar la probabilitat que la carta extreta siga as o copa.

b) Calcular la probabilitat que la carta siga l'as de copes. Es pot afirmar que entre les cartes que no s'han eliminat està l'as de copes?

48. En una ciutat en què hi ha doble nombre d'hòmens que de dones, hi ha una epidèmia. El 10 % dels hòmens i el 5 % de les dones estan malalts. Es tria a l'atzar un individu. Calcular la probabilitat de:

a) que siga home.

b) que estiga malalt.

c) que siga home, sabent que està malalt.

AUTOAVALUACIÓ

1. En una bossa hi ha 6 boles negres i 3 boles blanques, la probabilitat de traure una bola negra és:

a) 1/2 b) 2/3 c) 1/3 d) 5/9

2. Indica quin dels següents experiments no és un experiment aleatori:

a) Llançar un clarió i anotar el nombre de trossos en què es trenca

b) Llançar un dau trucat i anotar el nombre de la cara superior

c) Creuar un carrer i estudiar si hi ha un atropell

d) Calcular el consum de gasolina d'un cotxe

3. L'espai mostral de llançar 3 monedes a l'aire i anotar si cauen en cara (C) o en creu (X) amb successos elementals equiprobables és:

a) {CCC, CCX, CXX, XXX} b) {3C, 2C, 1C, 0C}

c) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX} d) {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC}

4. El succés contrari a traure almenys una cara en l'experiment anterior és:

a) {XXX} b) {CCC, CCX, CXX} c) {CXX, XCX, XXC } d) {CCC, CCX, CXC, XCC }

5. Indica quin dels següents successos no són independents:

a) Traure un or i traure un rei amb reemplaçament

b) Llançar una moneda i traure cara i tornar a llançar-la i tornar a traure cara

c) Llançar un dau i traure 6 i tornar a llançar-ho i tornar a traure 6

d) Llançar un dau i traure un múltiple de 2, i traure un 6

6. La probabilitat de no traure un as en una baralla de pòquer és:

a) 4/56 b) 52/56 c) 36/40 d) 1 – 36/40

7. La probabilitat que la suma de les cares superiors siga 7 de l'experiment tirar dos daus és:

a) 1/2 b) 7/36 c) 5/36 d) 2/3

8. En una bossa hi ha 7 boles roges i 4 blanques. Es trau una bola a l'atzar i si és blanca es torna a ficar a la bossa, mentres que si és roja es deixa fora. Es trau una altra bola de la bossa, la probabilitat que siga roja és:

a) 42/110 b) 28/121 c) 70/121 d) 411/605

9. En una bossa hi ha 4 boles roges i 3 blanques. Traiem sense mirar dues boles. La probabilitat que siguen del mateix color és:

a) 1/7 b) 2/7 c) 3/7 d) 4/7

10. En llançar un dau ha eixit un nombre parell, La probabilitat que siga un 6 és P(traure 6/ a parell):

a) 1/3 b) 1/6 c) 2/5 d) 3/6